

◀1999年 熊本大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 複素数 z ($z \neq i$) に対して, $w = \frac{z+i}{z-i}$ とおく. ただし, i は虚数単位とする. 次の問いに答えよ.

- (1) w が実数になるための z の条件を求めよ.
- (2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求めよ.

2 2個のサイコロを投げて, a, b を次のように決める. 異なる目が出たときは, 出た目の数の大きい方を a , 小さい方を b とする. 同じ目が出たときは, a, b ともに出た目の数とする. 2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の解について, 次の問いに答えよ.

- (1) 1つの解が $\frac{1}{2}$ より大きく, 他の解は $\frac{1}{2}$ より小さくなる確率を求めよ.
- (2) 2つの解が異なり, ともに $\frac{1}{2}$ より大きくなる確率を求めよ.

3 点 A を中心とする円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ が, 放物線 $y = x^2$ と異なる 2点 P, Q で接している. ただし, $a > \frac{1}{2}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a と b の関係式を求めよ.
- (2) $\triangle APQ$ が正三角形のとき, 円と放物線で囲まれた三日月形の面積を求めよ.

4 数列 $\{a_n\}$ について, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $S_0 = 0$ とおく.

$$a_n = S_{n-1} + n2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

- (1) S_n を n の式で表せ.
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k}$ を求めよ.

♠ 文系学部

1 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC の辺 BC を $1:2$ の比に内分する点を D とする. $\angle BAD = 30^\circ$, $AD = 1$ のとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\angle DAC$ を求めよ.
- (2) 辺 AB の長さを求めよ.

2 複素数 z ($z \neq i$) に対して, $w = \frac{z+i}{z-i}$ とおく. ただし, i は虚数単位とする. 次の問いに答えよ.

- (1) z を w で表せ.
- (2) 複素数平面上で z が $-i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求めよ.

3 理系学部 **3** と同じ.

4 n を自然数とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $|x| + |y| \leq n$ となる 2つの整数の組 (x, y) の個数を求めよ.
- (2) $|x| + |y| + |z| \leq n$ となる 3つの整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

ただし, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である.

出題範囲と難易度**♣ 理系学部**

- 1 標準 B 複素数と複素数平面
- 2 標準 I 2次関数・確率
- 3 標準 II 図形と方程式・微分積分
- 4 標準 III 数列の極限

♣ 文系学部

- 1 基本 I 図形と計量
- 2 標準 B 複素数と複素数平面
- 3 標準 II 図形と方程式・微分積分
- 4 標準 A 数列

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) $z = ki$ (k は 1 以外の実数)
 (2) 点 w は $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円周上を動く .
- 2** (1) $\frac{1}{3}$
 (2) $\frac{1}{2}$
- 3** (1) $4a = 4b^2 + 1$ ($a > \frac{1}{2}$)
 (2) $\frac{11\sqrt{3}}{108} - \frac{\pi}{18}$
- 4** (1) $S_n = 2^{n-1} \cdot n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k} = \frac{22}{9}$

◇ 文系学部

- 1** (1) $\angle DAC = 90^\circ$
 (2) $AB = \sqrt{3}$
- 2** (1) $z = \frac{i(w+1)}{w-1}$ ($w \neq 1$)
 (2) 点 w は $-\frac{1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円周上を動く .
- 3** 理系学部 **3** と同じ .
- 4** (1) $2n^2 + 2n + 1$ (個)
 (2) $\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2 + 2n + 3)$ (個)