

◀2003年 熊本大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 袋の中に1から3までの数を書いた札が2枚ずつ,計6枚入っている.この中から同時に2枚の札を取り出し,その数を m, n とするとき,次の問いに答えよ.ただし, $m \geq n$ とする.

- (1) $m = n$ となる確率を求めよ.
- (2) 直線 $y = x + c$ と点 (m, n) との距離の2乗を S とする. S の期待値を求めよ.
- (3) S の期待値が最小になる c の値を求めよ.

2 正三角形PQRの3辺PQ, QR, RP上にそれぞれ点A, B, Cをとる. $\triangle PCA, \triangle QAB, \triangle RBC$ の外接円の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 ,その半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする. $\triangle ABC$ の3辺の長さを $a = BC, b = CA, c = AB$ とすると,次の問いに答えよ.

- (1) r_1, r_2, r_3 を a, b, c で表せ.
- (2) $\triangle O_1O_2O_3$ は正三角形であることを示せ.

3 関数 $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ について,次の問いに答えよ.

- (1) $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ.
- (2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leq x \leq k+1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)において, $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)$ と定義する. $a_n = \int_0^n g(x) dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とすると,数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

4 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x) = \int_0^x (g(t) + t \cos t) dt + \sin x, \quad g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t) - \cos t) dt$$

を満たすとき,次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.
- (2) $\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2 dx$ を求めよ.

♠ 文系学部

1 理系学部**1**と同じ.

2 関数 $f(x) = \log_2 x + 2\log_2(6-x)$ の最大値を求めよ.

3 円 $C: x^2 + y^2 - 4kx + 2ky - 5 = 0$ について,次の問いに答えよ.

- (1) C は k の値に関係なくある2つの点A, Bを通る.A, Bの座標を求めよ.ただし,Aの x 座標はBの x 座標より小さいとする.
- (2) $PA:PB = 2:1$ となる点Pの軌跡を求めよ.

4 放物線 $y = x^2$ 上に2点P, Qがある.P, Qの x 座標がそれぞれ $a, a+2$ であるとき,次の問いに答えよ.ただし, $-2 < a < 0$ とする.

- (1) 原点を O とするとき, $\triangle OPQ$ の面積 S_1 を求めよ.
- (2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ.
- (3) $S_2 = 2S_1$ となる a の値を求めよ.

出題範囲と難易度**♣ 理系学部**

- 1 標準 I 確率
- 2 標準 II 図形と方程式
- 3 標準 III 数列の極限・積分法
- 4 標準 III 積分法

♣ 文系学部

- 1 標準 I 確率
- 2 基本 II 対数関数
- 3 基本 II 図形と方程式
- 4 基本 II 微分積分

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) $\frac{1}{5}$
(2) $\frac{1}{30}(15c^2 + 32c + 24)$
(3) $c = -\frac{16}{15}$
- 2** (1) $r_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}, r_2 = \frac{c}{\sqrt{3}}, r_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$
(2) 証明は省略
- 3** (1) $\int_0^1 f(x) dx = 4 - \sqrt{10}$
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12 - 3\sqrt{10}$
- 4** (1) $f(x) = (x+1)\sin x, g(x) = \sin x$
(2) $\int_0^\pi (f(x) - g(x))^2 dx = \frac{\pi}{12}(2\pi^2 - 3)$

◇ 文系学部

- 1** 理系学部 **1** と同じ.
- 2** 最大値: $5 (x = 2)$
- 3** (1) $A(-1, -2), B(1, 2)$
(2) 点 P の軌跡は, 中心 $(\frac{5}{3}, \frac{10}{3})$, 半径 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ の円
- 4** (1) $S_1 = -a^2 - 2a$
(2) $S_2 = \frac{4}{3}$
(3) $a = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$