

◀2009年 熊本大学(前期)▶

♠ 理系学部

注：医学部(医)は、**1**~**4** 必答。理学部・医学部(保技)は、**3**~**6** 必答。

1 実数 t に対して、座標平面上の点 $(0, 1)$ と $(1, t)$ を通る直線を l とし、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により、直線 l 上の各点は、ある直線 m 上の点に移るとする。 l と m の交点を $P(x, y)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y を t の式で表せ。
- (2) t がすべての実数を動くとき、 P はある円周上を動くことを示せ。

2 $p > 0$ とする。各項が正である2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、次の条件をみたすものとする。

$$\begin{cases} a_1 = 3, & b_1 = 1 \\ a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1 & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ (a_{n-1} + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n & (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_n - b_n$ を求めよ。
- (2) $a_n b_n$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 + b_n^3}{a_n^3 - b_n^3}$ の値を $f(p)$ とおくと、 $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \log f(p)$ を求めよ。

3 大小2個のサイコロを投げ、大きいサイコロの目の数を p 、小さいサイコロの目の数を q とする。 $y = px^2$ のグラフと $y = qx + 1$ のグラフの交点のうち、 x 座標が負のものを A 、正のものを B とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点の y 座標が2より小さくなる確率を求めよ。
- (2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ。
- (3) $\angle OAB$ が 90° より大きくなる確率を求めよ。ただし、 O は座標平面の原点である。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $-\pi \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sqrt{3} \cos x - \sin x > 0$ をみたす x の範囲を求めよ。
- (2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx$ を求めよ。

5 実数 p に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{p-x}^p (t^6 + 2t^3 - 3) dt$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$ は、 $x = p + 1$ のとき最小値をとることを示せ。
- (2) $f(p + 1)$ の $p > 0$ における最小値を求めよ。

6 $0 < a < 3$ とする. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を次の手順で求めよ.

- (1) $0 < x < 3$ のとき, $0 < \log(1 + x) < x - \frac{1}{6}x^2$ であることを示せ. 必要があれば, $0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよい.
- (2) $0 < a_n < \frac{6}{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

♠ 文系学部

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt$$

で定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x) = 0$ をみたす x をすべて求めよ.
- (2) $-3 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ.

2 大小 2 個のサイコロを投げ, 大きいサイコロの目の数を p , 小さいサイコロの目の数を q とする.

$y = px^2$ のグラフと $y = qx + \frac{1}{4}$ のグラフの交点のうち, x 座標が負のものを A, 正のものを B とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 AB の中点の x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ.
- (2) A の x 座標が有理数となる確率を求めよ.

3 a, b を定数とし, $a > b$ をみたすものとする.

$$f(x) = a \cos^2 x + \sqrt{3}(a - b) \cos x \sin x + b \sin^2 x$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の最大値が 6, 最小値が 2 となるときの a, b を求めよ.
- (2) (1) で求めた a, b に対して, $f(x)$ を考える. $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ.

4 四面体 OABC において, \vec{OA} と \vec{BC} は垂直であり, $\triangle OAB$ の面積と $\triangle OAC$ の面積が等しいとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $OB = OC$ を示せ.
- (2) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき, \vec{OG} と \vec{BC} は垂直であることを示せ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1 基本 C 行列・1次変換
- 2 難 B 数列・ III 数列の極限
- 3 標準 A 確率
- 4 標準 III 積分法の応用
- 5 標準 II 微分積分
- 6 標準 II 対数関数・ B 数列

♣ 文系学部

- 1 基本 II 微分積分
- 2 標準 A 確率
- 3 標準 II 三角関数
- 4 標準 B ベクトル(空間)

略解

◇ 理系学部

$$\mathbf{1} \quad (1) \quad x = \frac{-t+3}{t^2-2t+2}, \quad y = \frac{2t-1}{t^2-2t+2}$$

(2) 証明は省略

$$\mathbf{2} \quad (1) \quad a_n - b_n = n + 1$$

$$(2) \quad a_n b_n = pn^2 + (p+3)n - 2p$$

$$(3) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \log f(p) = 0$$

$$\mathbf{3} \quad (1) \quad \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad \frac{29}{36}$$

$$\mathbf{4} \quad (1) \quad -\frac{2}{3}\pi < x < \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{3} \log \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

$\mathbf{5}$ (1) 証明は省略

$$(2) \quad -\frac{40}{7}$$

$\mathbf{6}$ (1) 証明は省略

$$(2) \quad \text{証明は省略} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

◇ 文系学部

$$\mathbf{1} \quad (1) \quad x = 0, \quad \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \quad -9 \quad (x = \pm 3)$$

$$\mathbf{2} \quad (1) \quad \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \frac{1}{18}$$

$$\mathbf{3} \quad (1) \quad a = 5, \quad b = 3$$

$$(2) \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

$\mathbf{4}$ (1) 証明は省略

(2) 証明は省略