

◀2013年 京都大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 平行四辺形 ABCD において、辺 AB を 1:1 に内分する点を E、辺 BC を 2:1 に内分する点を F、辺 CD を 3:1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき、比 AP:PQ を求めよ。

2 N を 2 以上の自然数とし、 a_n ($n = 1, 2, \dots$) を次の性質 (i), (ii) をみたす数列とする。

(i) $a_1 = 2^N - 3,$

(ii) $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$a_n \text{ が偶数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \quad a_n \text{ が奇数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ。

3 n を自然数とし、整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。このとき a と b は整数であり、さらにそれらとともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

4 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

5 xy 平面内で、 y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1: y = \sqrt{3} \log(1+x), \quad C_2: y = \sqrt{3} \log(1-x)$$

とそれぞれ点 A、点 B で接しているとする。さらに $\triangle PAB$ は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C, C_1 , C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし、2 つの曲線がある点で接するとは、その点を共有し、さらにその点において共通の接線をもつことである。

6 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき、石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。 n を自然数とし、 $2n$ 回硬貨を投げたとき、石が座標 $2n - 2$ の点にある確率を求めよ。

♠ 文系学部

1 a を 2 以上の実数とし、 $f(x) = (x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

2 理系学部の **1** と同じ。

3 n と k を自然数とし、整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

- (1) a と b は整数であることを示せ。
 (2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

4 α, β を実数とする。 xy 平面内で、点 $(0, 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$$

が点 $P(\sqrt{3}, 0)$ を共有し、さらに P における接線が一致している。このとき以下の問に答えよ。

- (1) α, β の値を求めよ。
 (2) 円 C 、放物線 $y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げたとき表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

- (1) 石が座標 x の点にあるとする。2回硬貨を投げたとき、石が座標 x の点にある確率を求めよ。
 (2) 石が原点にあるとする。 n を自然数とし、 $2n$ 回硬貨を投げたとき、石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 基本 B ベクトル
2 標準 B 数列
3 標準 II 整式・ B 数列
4 標準 III 微分法
5 標準 III 微分法の応用・積分法の応用
6 標準 A 確率

♣ 文系学部

- 1** 標準 I 不等式
2 基本 B ベクトル
3 標準 II 整式・ B 数列
4 標準 II 微分積分
5 標準 A 確率

略解

◇ 理系学部

- 1** $AP : PQ = 19 : 3$
- 2** 証明は省略
- 3** 証明は省略
- 4** 最大値 : $\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2 \quad (x = \pm \frac{\pi}{2})$
- 5** $2\sqrt{3}(4 - \log 3) - \frac{8}{3}\pi$
- 6** (1) $\frac{1}{2}$
(2) $\frac{n}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

◇ 文系学部

- 1** $2 \leq a < 2 + 2\sqrt{2}$
- 2** 理系学部 **1** と同じ .
- 3** (1) 証明は省略
(2) 証明は省略
- 4** (1) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = 2$
(2) $\frac{7\sqrt{3}}{3} - \pi$
- 5** (1) $\frac{1}{2}$
(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^n$