◀1995 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の 2 つのだ円を考える．

だ円 A：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，　だ円 B：$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

これらに関して，以下の問いに答えよ．

(1)　だ円 A をだ円 B に移し，点 $(2,\ 0)$ を点 $(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ に移す 1 次変換を表す行列を求めよ．

(2)　だ円 A をだ円 B に移す 1 次変換を f とする．原点を O とし，2 点 $(2,\ 0)$, $(0,\ 1)$ が f によって移る点をそれぞれ P, Q とする．$\angle$POQ が最小となるように f を選んだとき，$\cos\angle$POQ を求めよ．

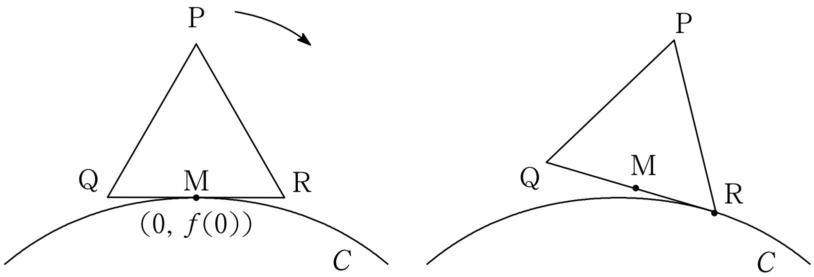
2　どのような実数 x に対しても，不等式 $|x^3+ax^2+bx+c| \leqq |x^3|$ が成り立つように，実数 $a,\ b,\ c$ を定めよ．

3　正の実数 a に対して，$f(x)=a\log x+1$ とおく．点 $(-a,\ 0)$ から曲線 $y=f(x)$ に接線をひき，接点の x 座標を x_0 とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸と直線 $x=x_0$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ で表す．

(1)　$S(a)$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{S(a)}{a^2}$ の最大値を求めよ．

4　$f(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおき，曲線 C：$y=f(x)$ を考える．1 辺の長さ a の正三角形 PQR は最初，辺 QR の中点 M が曲線 C 上の点 $(0,\ f(0))$ に一致し，QR が C に接し，さらに P が $y>f(x)$ の範囲にあるようにおかれている．ついで，$\triangle$PQR が曲線 C に接しながら滑ることなく右に傾いてゆく．最初の状態から，点 R が初めて曲線 C 上にくるまでの間，点 P の y 座標が一定であるように，a を定めよ．



5　自然数 n に対して図形 T_n を以下のように順に定義する．まず T_1 は，3 つの点を 2 つの長さ 1 の線分で図 1 のように結んで定義する．一般に図形 T_{n+1} は図形 T_n を 2 つと点を 1 つ用意し，その点と T_n の一番上の点を長さ 1 の線分で結ぶことにより，図 2 のように定義する．たとえば T_3 は図 3 のようになる．T_n を通信回路と考える．隣接する 2 つの点を結ぶ長さ 1 の通信路が故障しているかどうかは互いに独立であって，その確率はすべて p であるとする．T_n の一番上の点を O，一番下の 2^n 個の点の集合を A_n で表す．O から A_n のどの点へも通信できない確率を p_n とする．

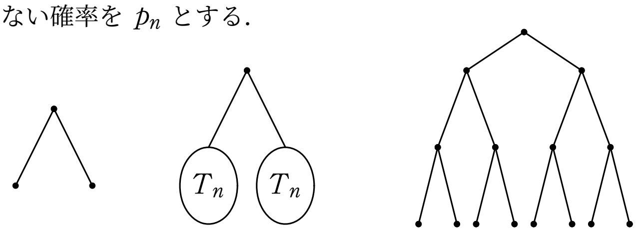


図 1：T_1　　図 2：T_{n+1}　　図 3：T_3

(1)　p_n と p_{n+1} の関係式を求めよ．

(2)　$1-p_{n+1} \leqq 2(1-p)(1-p_n)$ となることを示せ．

(3)　$p>\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　xyz 空間において，平面 $z=0$ 上に原点を中心とする半径 1 の円があり，点 P はこの円の周上を動く．点 P と点 $(0,\,0,\,2)$ を通る直線が平面 $x+y+z=-2$ と交わる点を Q とする．点 Q の z 座標の最大値と最小値を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　原点を O とし，曲線 $y=x^3$ 上の O とは異なる 2 点を $\mathrm{P}(a,\,a^3)$, $\mathrm{Q}(b,\,b^3)$ とする．$a \neq \pm b$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=f(x)$ が 3 点 O, P, Q を通るように 2 次式 $f(x)$ を定めよ．

(2)　積分 $\displaystyle\int_0^a \{x^3-f(x)\}\,dx$ の値が 0 となるとき，b を a で表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　基解 三角関数・代幾 1 次変換

2　標準　I 不等式の証明

3　標準　微積 微分法の応用・積分法の応用

4　標準　微積 積分法の応用（曲線の長さ）

5　標準　基解 数列・確統 確率

♣ 文系学部

1　標準　代幾 直線の方程式・平面の方程式

2　標準　I 不等式の証明

3　標準　基解 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & \pm\sin\theta \\ \sin\theta & \mp 2\cos\theta \end{pmatrix}$$ （複号同順）

(2) $\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{3}{5}$

2 $a=b=c=0$

3 (1) $S(a)=a^2+ae^{-\frac{1}{a}}$

(2) $1+\dfrac{1}{e}$

4 $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

5 (1) $p_{n+1}=(p+p_n-pp_n)^2$

(2) 証明は省略

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=1$

◇ 文系学部

1 最大値：$-2(3-2\sqrt{2})$，最小値：$-2(3+2\sqrt{2})$

2 理系学部 **2** と同じ.

3 (1) $f(x)=(a+b)x^2-abx$

(2) $b=\dfrac{a}{2}$