

◀2007年 東北大学(前期)▶

♠ 理系学部

注：理・工・医(医)学部は 1~6 を解答。医(医以外)・歯・薬・農学部は, 1~4 を解答。

1 n を 2 以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

2 $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して, $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また, 線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。 $\angle A = \theta$ とおくととき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし, $\sqrt{2} = 1.414\cdots, \sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい。

3 自然数 n に対し, 方程式

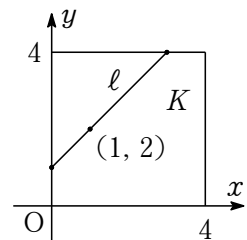
$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

- (1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ。
- (2) (1) の解を x_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ。

4 xy 平面上に 4 点 $(0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1, 2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく。

- (1) l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ。
- (2) l の長さの最小値を求めよ。



5 xyz 空間において, 点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし, l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

6 $a > 0$ に対し

$$I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。

- (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。
- (2) 漸化式

$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せ。

- (3) 自然数 n に対して, $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。

♠ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ。

2 理系学部 **2** と同じ.

3 xy 平面の3点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle ABC$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して, 点 $P(x, a)$ が $\triangle ABC$ に含まれるための x の範囲を求めよ.
- (2) (1) の定数 a に対して, (1) で求められた範囲を x が動くとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.
- (3) 点 $P(x, y)$ が $\triangle ABC$ に含まれるとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と, そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ.

4 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$$

を満たしているとする. このとき, $f(x)$ を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** |難| B 数列
- 2** |標準| II 三角関数
- 3** |標準| III 関数の極限
- 4** |難| III 微分法の実用
- 5** |標準| III 積分法の実用
- 6** |難| III 積分法

♣ 文系学部

- 1** |難| B 数列
- 2** |標準| II 三角関数
- 3** |標準| I 2次関数
- 4** |標準| II 微分積分

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) $a_2 = 6, b_2 = 12$
 (2) $a_{n+1} = 6a_n + b_n, b_{n+1} = 12a_n$
 (3) 2, 3
- 2** (1) $\sin \theta = \frac{24}{25}$
 (2) 証明は省略
- 3** (1) 証明は省略
 (2) 証明は省略
- 4** (1) 最大値: $\frac{4\sqrt{13}}{3}, \ell: y = \pm \frac{2}{3}(x-1) + 2$
 (2) 最小値: 4
- 5** 6π
- 6** (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a) = \frac{2}{3}$
 (2) 証明は省略
 (3) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) = \frac{2}{2n+3}$

◇ 文系学部

- 1** 理系学部 **1** と同じ .
- 2** 理系学部 **1** と同じ .
- 3** (1) $\frac{a}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2 - \frac{a}{\sqrt{3}}$
 (2) 最小値: $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5, x = 1$
 (3) 最小値: 4, $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- 4** $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$ または $f(x) = x^2 - x$