1999 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　曲線 $C : y = e^x$ と直線 $\ell : y = ax + b$ $(a > 0)$ が 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている。ただし，$x_1 < x_2$ とする。

(1)　$x_2 - x_1 = c$ とおくとき，y_1 と y_2 を a と c を用いて表せ。

(2)　P と Q の距離が 1 であるとする。曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = x_1$，$x = x_2$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を $V(a)$ とおくとき，

$$\lim_{a \to \infty} \frac{V(a)}{a}$$

を求めよ。

2　xy 平面上の点 $(a,\ b)$ は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし，必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってよい。

3　平面上に，点 O を中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 ℓ を考え，各 A_k と ℓ との距離をそれぞれ d_k とする。このとき

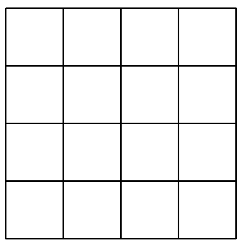
$$D = {d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 + {d_4}^2 + {d_5}^2 + {d_6}^2$$

は ℓ によらず一定であることを示し，その値を求めよ。ただし，$\mathrm{OA}_k = r$ とする。

4　xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても，平面 $z = a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y = a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

5

一辺の長さが 4 の正方形の紙の表（おもて）を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。



1999年度　大阪大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$y_1=\dfrac{ac}{e^c-1}$，$y_2=\dfrac{ac}{e^c-1}e^c$　　（2）π

2 証明は省略

3 証明は省略，$3r^2$

4 $\dfrac{1}{4}$

5 $\dfrac{89}{300}$