

2007 年度 京都大学 (前期)

医学部

試験時間 : 150 分

 全問必答

1 以下の各問にそれぞれ答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ。

(2) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

2 x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ。

3 p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件 $a+b+c+d=0$, $ad-bc+p=0$, $a \geq b \geq c \geq d$ を満たすとき、 a, b, c, d を p を用いて表せ。

4 点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を P, Q, R とする。 $\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

5 A を 2 次の正方行列とする。列ベクトル \vec{x}_0 に対し、列ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ を $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって定める。ある零ベクトルではない \vec{x}_0 について、3 以上の自然数 m で初めて \vec{x}_m が \vec{x}_0 と一致するとき、行列 A^m は単位行列であることを示せ。

6 すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たし、さらに任意の実数 a, b に対して $1 + f(a)f(b) \neq 0$ であって $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たしている。

(1) 任意の実数 a に対して、 $-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸であることを証明せよ。

2007 年度 京都大学 (前期)**医学部**

(略解)

 証明, 図示などは省略**1**

(1) $\log(\sqrt{2} + 1) + 4\sqrt{2} - 4$

(2) 277 (通り)

2

図示は省略

3

$$a = \frac{p+1}{2}, b = \frac{p-1}{2}, c = \frac{1-p}{2}, d = -\frac{p+1}{2}$$

4

正三角形

5

証明は省略

6

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略