2010年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　関数

$$f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$$

を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式

$$\log f''(x)=-f(x)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}\,dx$ を求めよ。

2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1: x^2+3y^2=3,\ C_2: \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とし，y 軸と ℓ_1，ℓ_2 の交点をそれぞれ Q，R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。

3　l，m，n を 3 以上の整数とする。等式

$$\left(\frac{n}{m}-\frac{n}{2}+1\right)l=2$$

を満たす l，m，n の組をすべて求めよ。

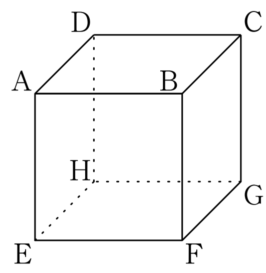
4　半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A)，(B) を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

5　n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD−EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P，Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。



(1)　時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組合せをすべて挙げよ。

(2)　時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3)　時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。

2010 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略　　(2)　$3\log 2 - 2\log 3$

2　$2\sqrt{2}$

3　$(l,\ m,\ n) = (4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (8,\ 4,\ 3),\ (12,\ 3,\ 5),\ (20,\ 5,\ 3)$

4　$\dfrac{22}{3}\pi$

5

(1)　(B，D)，(B，G)，(D，B)，(D，G)，(E，B)，(E，D)，(E，G)

(2)　$r_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^n$

(3)　$p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{9}q_n$

(4)　2