2011 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　a を自然数とする。O を原点とする座標平面上で行列 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。

(1)　$r>0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて $A=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a で表せ。

(2)　点 Q$(1, 0)$ に対し，点 Q_n（$n=1$，2，3，$\cdots$）を

$$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q},\quad \mathrm{Q}_{n+1}=f(\mathrm{Q}_n)$$

で定める。$\triangle \mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ。

(3)　f によって点（2，7）に移されるもとの点 P の x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという。自然数 a の値を求めよ。またこのとき $S(n)>10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ。ただし $0.3<\log_{10}2<0.31$ を用いてよい。

2　実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 P$(0, \sin\theta)$ および Q$(8\cos\theta, 0)$ を考える。θ が $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

3　実数の組（p，q）に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組（p，q）と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組（p_1，q_1），（p_2，q_2）に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α，β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \text{ かつ } f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形 $R: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0, 1)$，$\mathrm{P}_1(0, 0)$，$\mathrm{P}_2(1, 1)$，$\mathrm{P}_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする。実数の組（p，q）を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

4　a，b，c を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p，q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ。

$$x \geqq 1 \text{ ならば } |px+q| \leqq rx$$

(2)　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k，l が存在することを示せ。

$$x \geqq 1 \text{ ならば } \left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| \leqq \frac{l}{x}$$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ。

5　正数 r に対して，$a_1=0$，$a_2=r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1}) \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n=\dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n=\dfrac{1}{2r}$ とする。ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする。a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　p_3 および p_4 を，r を用いて表せ。

(2)　$n \geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ。

(3)　数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ。

(4)　r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ の最小値を求めよ。

2011 年度　大阪大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $r=\sqrt{a^2+1}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(2) $S(n)=\dfrac{1}{2}(a^2+1)^{n-1}$

(3) $a=2$，$n=16$

2 $\dfrac{128}{105}\pi$

3

(1) $(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，接点 $(1,\ 1)$

(2) 証明は省略

(3) 図示は省略，面積：$\dfrac{5}{6}$

4

(1) 証明は省略　(2) 証明は省略　(3) 証明は省略

5

(1) $p_3=\dfrac{1}{4}r^2+r+\dfrac{1}{4}$，$p_4=\dfrac{1}{16}r^3+\dfrac{1}{4}r^2+\dfrac{9}{8}r+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16r}$

(2) $$p_n=\begin{cases}(n-1)r & (r=2\pm\sqrt{3})\\ \dfrac{4r^2}{r^2-4r+1}\left\{\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{1}{4r}\right)^{n-1}-1\right\} & (r\fallingdotseq 2\pm\sqrt{3})\end{cases}$$

(3) $2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(4) $\dfrac{4}{3}\quad\left(r=\dfrac{1}{2}\right)$