

## 2013年度 群馬大学 (前期)

医学部

試験時間：120分

全問必答

## 1

- (1)  $201^{20}$  の十億の位の数字を求めよ。
- (2)  $201^{20}$  を  $4 \times 10^7$  で割ったときの余りを求めよ。

## 2

- 空間内に4点  $A(2, 0, 2)$ ,  $B(6, 0, 0)$ ,  $C(4, 2, 2)$ ,  $D(5, 1, 7)$  がある。
- (1) 3点  $A, B, C$  を含む平面を  $\alpha$  とし、点  $D$  から  $\alpha$  に下ろした垂線と  $\alpha$  の交点を  $H$  とする。点  $E$  を、 $H$  が線分  $DE$  の中点となるようにとるとき、 $E$  の座標を求めよ。
  - (2)  $0 < t < 1$  とする。線分  $AB$  を  $t : 1 - t$  に内分する点を  $P$ 、線分  $BC$  を  $t^2 : 1 - t^2$  に内分する点を  $Q$ 、線分  $CD$  の中点を  $R$  とするとき、四面体  $BPQR$  の体積の最大値を求めよ。

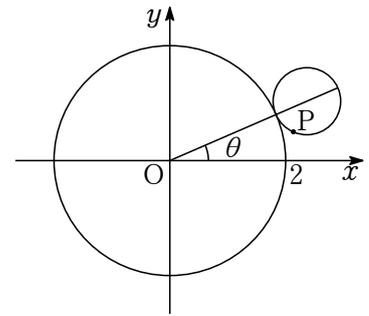
## 3

- 座標平面において、原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円周  $C$  上に定点  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  をとる。 $C$  の上半円周 ( $y$  座標が正の部分) 上を動く点を  $P$ 、下半円周 ( $y$  座標が負の部分) 上を動く点を  $Q$  とする。 $\angle PAB = \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )、 $\angle QAB = \beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) とし、直線  $PQ$  と  $x$  軸との交点を  $R(t, 0)$  とする。
- (1)  $t$  を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
  - (2)  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  のとき、 $t$  のとり得る値の範囲を求めよ。
  - (3) 線分  $PR$  の長さと線分  $RQ$  の長さの比が  $2 : 1$  のとき、 $t$  を  $\alpha$  を用いて表せ。

## 4

- 自然数  $n$  について、 $0$  以上  $n$  以下の整数  $x, y$  を座標にもつ点  $(x, y)$  全体の集合を  $X_n$  とする。行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  の表す一次変換による  $X_n$  の点の像全体の集合を  $Y_n$  とする。 $X_n$  と  $Y_n$  の共通部分  $X_n \cap Y_n$  の点の個数を  $a_n$  とする。
- (1) 点  $(187, 110)$  は  $Y_{100}$  に含まれるかどうか理由をつけて述べよ。
  - (2)  $a_5$  を求めよ。
  - (3) 自然数  $m$  について、 $a_{6m}$  を  $m$  を用いて表せ。

**5** 原点  $O$  を中心とする半径 2 の円を  $A$  とする。半径 1 の円 (以下, 「動円」と呼ぶ) は, 円  $A$  に外接しながら, すべることなく転がる。ただし, 動円の中心は円  $A$  の中心に関し反時計回りに動く。動円上の点  $P$  の始めの位置を  $(2, 0)$  とする。動円の中心と原点を結ぶ線分が  $x$  軸の正方向となす角を  $\theta$  として,  $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で動かしたときの  $P$  の軌跡を  $C$  とする。



- (1)  $C$  を媒介変数  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $P$  の  $y$  座標が  $\frac{1}{2}$  のとき,  $P$  での  $C$  の接線の傾きを求めよ。
- (3)  $C$  の長さを求めよ。ただし, 曲線  $x = f(\theta), y = g(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

で与えられる。

## 2013年度 群馬大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

**1**

(1) 1

(2) 7604001

**2**

(1) E(1, 5, -1)

(2) 最大値:  $\frac{16}{27}$

**3**

(1)  $t = \frac{\sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$

(2)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t < 1$

(3)  $t = \frac{1}{3} (\cos 2\alpha \pm \sqrt{4 - \sin^2 2\alpha})$

**4**

(1) 含まれる, 理由は省略

(2)  $a_5 = 10$

(3)  $a_{6m} = 9m^2 + 4m + 1$

**5**

(1)  $x = 3 \cos \theta - \cos 3\theta, y = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$

(2)  $\sqrt{3}$

(3) 6