2014 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　実数 a, b, c, d, e に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a, b)$，$\mathrm{B}(c, d)$，$\mathrm{C}(e, 0)$ をとる．ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 s，t で

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすものが存在するための，a, b, c, d, e についての必要十分条件を求めよ。

2　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア) (イ) を満たす。

(ア) $t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ。

(イ) $t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。

3　$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

4　半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n\geqq 3)$ の球 T_1，T_2，$\cdots$，T_n があり，次の条件 (ア) (イ) を満たす。

(ア) T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している（$i=1$，2，$\cdots$，n）。

(イ) T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており（$i=1$，2，$\cdots$，$n-1$），そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1，T_2，$\cdots$，T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，$\cdots$，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ。

5　さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　$p_n + q_n$ を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

2014 年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1 $ad-bc \fallingdotseq 0$ または $e=0$ または $b=d=0$

2 $f(t)=1+\log\dfrac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}-\sqrt{t^2+1}$

3 398

4

(1) $r_n=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$　　(2) $\dfrac{2}{3}$

5

(1) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　　(2) $p_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　　(3) $p_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$