2016年度　三重大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　平面上の △ABC と点 O を考える。m，n は正の実数とする。

(1)　辺 AB を $m:n$ に内分する点を M とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2$ を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$ と内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。さらに

$$\frac{mn}{m+n}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(m+n)|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=n|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

を示せ。

(2)　辺 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M_1}$，辺 BC を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M_2}$，辺 CA を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M_3}$ とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ は

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2\right)+|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}|^2$$

に等しいことを示せ。

(3)　(2) の m，n を変化させたとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}|^2$$

の最大値を $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$ で表せ。

2　$0 \leqq x \leqq 2$ とする。

(1)　$\sin \pi x+\cos 2\pi x>0$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　(1) で求めた x の範囲に対し，

$$\log_2(3+x)+\log_2(5-x)=\log_2(16-k)$$

の解がひとつだけであるような実数 k の範囲を求めよ。

3　以下の a，b，c はいずれも正の実数とする。

(1)　「ab が有理数ならば，$(a+b)^2$ は有理数である」という主張が正しければ証明し，誤りならば反例を与えよ。

(2)　ab，ac，bc が有理数ならば，a^2 は有理数であることを示し，さらに $(a+b+c)^2$ は有理数であることを示せ。

(3)　ab，ac，bc が有理数で，さらに $(a+b+c)^3$ が有理数となるならば，a，b，c はそれぞれ有理数であることを示せ。

4　n を自然数とし，$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ \log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ を平面上の $n+1$ 個の点とする。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。

(1)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のとき，点 P_{k-1} と点 P_k との距離 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ に対して

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^2}}<\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\dfrac{k-1}{n}\right)^2}}$$

を示せ。

(2)　$L_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ としたとき $\lim_{n\to\infty}L_n$ を求めよ。

2016年度　三重大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$,
$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\dfrac{1}{(m+n)^2}\left(n^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2mn\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\right)$，証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2\right)$

2

(1) $0\leqq x<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{11}{6}<x\leqq 2$

(2) $k=0$，$\dfrac{1}{36}\leqq k<\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}<k\leqq\dfrac{25}{36}$

3

(1) 誤り。反例：$a=2^{\frac{1}{4}}$，$b=2^{\frac{3}{4}}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4

(1) 証明は省略

(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$