2016 年度　大阪市立大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　r は $0<r<1$ を満たす実数とする。次の問いに答えよ。ただし，$0^r=0$ と定める。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$x \geqq 0$ について，不等式 $(a+x)^r \leqq a^r + x^r$ を示せ。

(2)　$a_k \geqq 0$（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）のとき，不等式 $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^r \leqq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^r$ を示せ。

2　次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 n に対し，$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおくとき，$C_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}C_n$ を示せ。ただし，$\cos^0 x = 1$ と定める。

(2)　座標空間内で，連立不等式

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ z+2x^2-x^4 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。

3　$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，第 1 象限内の曲線 $C : x^r + y^r = 1$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，ℓ を点 P における C の接線とし，ℓ が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A，B とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A と点 B の座標を p，q，r を用いて表せ。

(2)　点 P を曲線 C 上のどこにとっても線分 AB の長さが同じになるような r の値を求めよ。

4　n を正の整数とし，m を 0 以上 10 以下の整数とする。袋 1 から袋 n まで，外見では区別のつかない袋が n 袋ある。$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，袋 k の中には，赤球が k 個，白球が $n-k$ 個入っているものとする。袋を 1 つ選んだ後，その選んだ袋について次の操作を 10 回繰り返して行うことにする。

（操作）　袋から球を 1 つ取り出し，色を確認してその袋に戻す。

赤球をちょうど m 回取り出す確率を $P_{m,n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P_{m,n}$ を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} P_{10,n}$ を求めよ。

(3)　$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ について，$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \lim_{n\to\infty} P_{m+1,n}$ を示せ。

2016 年度 大阪市立大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) 証明は省略　　(2) 証明は省略

2

(1) 証明は省略　　(2) $\dfrac{5}{32}\pi$

3

(1) A$(p^{1-r},\ 0)$，B$(0,\ q^{1-r})$　　(2) $r=\dfrac{2}{3}$

4

(1) $P_{m,n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}{}_{10}\mathrm{C}_m\left(\dfrac{k}{n}\right)^m\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^{10-m}$　　(2) $\dfrac{1}{11}$

(3) 証明は省略