2016 年度　愛媛大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　次の問いに答えよ。

(1)　a，b を正の実数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b を求めよ。

(2)　1 辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ における三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の面積を S_n とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

(3)　a，b は実数で $a>0$ を満たすとする。放物線 $y=\dfrac{1}{2a^2}x^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ 1 つの共有点 P をもつとき，P の座標および b を a を用いて表せ。

(4)　$1\leqq x\leqq 2$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2\frac{|t-x|}{t^2}\,dt$ を最小にする x の値を求めよ。

2　$f(x)=\dfrac{x}{2}$，$g(x)=x$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=1$ とし，2 枚の硬貨を繰り返して投げ，n 回目の事象により x_n を次のように定める。

$$x_n=\begin{cases} f(x_{n-1}) & \text{(2 枚とも表のとき)}\\ g(x_{n-1}) & \text{(1 枚が表，1 枚が裏のとき)}\\ h(x_{n-1}) & \text{(2 枚とも裏のとき)}\end{cases}$$

また p_n，q_n，r_n をそれぞれ $0<x_n\leqq\dfrac{1}{3}$ である確率，$\dfrac{1}{3}<x_n\leqq\dfrac{2}{3}$ である確率，$\dfrac{2}{3}<x_n\leqq 1$ である確率とする。

(1)　すべての自然数 n に対して $0<x_n\leqq 1$ を示せ。

(2)　p_1，q_1，r_1 を求めよ。

(3)　p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(4)　p_n-r_n を求めよ。

(5)　p_n を求めよ。

3　z_0 を虚数単位 i と異なる複素数とする。複素数 z_n を

$$z_n=i+\frac{\sqrt{2}(z_{n-1}-i)(1+i)}{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。

(1)　すべての自然数 n に対し $z_n\neq i$ であることを示せ。

(2)　$\dfrac{z_n-i}{z_{n-1}-i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ。ただし，θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(3)　$z_m=z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ。

(4)　複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする。(3) で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\cdots\cdots$，$\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする。$z_0=1-i$ のとき S の値を求めよ。

4　$f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする。また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする。ただし，a は $a>1$ を満たす実数である。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ。なお，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ であることを用いてよい。

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。

(3)　原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする。C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4)　(3) で求めた S に対して，$S<\dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ。

5　正方形 ABCD の内部の点 P に対して ∠CPD が直角であるとき，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}$ の最大値を求めよ。

2016 年度　愛媛大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a=2,\ b=2+\sqrt{5}$

(2)　π

(3)　$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}\right),\ b=\dfrac{1}{2}-\log a$

(4)　$x=\dfrac{4}{3}$

2

(1)　証明は省略

(2)　$p_1=0,\ q_1=\dfrac{1}{4},\ r_1=\dfrac{3}{4}$

(3)　$p_n=\dfrac{3}{4}p_{n-1}+\dfrac{1}{4}q_{n-1},\ q_n=\dfrac{1}{4}p_{n-1}+\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{4}r_{n-1},\ r_n=\dfrac{1}{4}q_{n-1}+\dfrac{3}{4}r_{n-1}$

(4)　$p_n-r_n=-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

(5)　$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

3

(1)　証明は省略

(2)　$r=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

(3)　$m=8$

(4)　$S=10\sqrt{2}$

4

(1)　図示は省略

(2)　$x=\dfrac{a\log a}{a-1}$

(3)　$S=a^{-\frac{a}{a-1}}(a-1)$

(4)　証明は省略

5

最大値：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$