2017 年度　九州大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　定数 $a>0$ に対し，曲線 $y=a\tan x$ の $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y=\sin 2x$ の $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2)　a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3)　a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

2　2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a，b を用いて表せ。

(2)　さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a，b を用いて表せ。

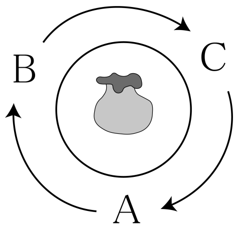
3　初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

4　赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。ただし，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$d_n=a_n+b_n+c_n$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

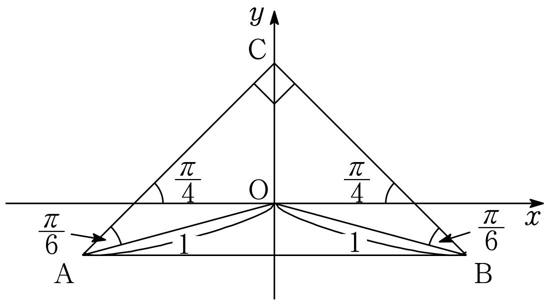
(3)　自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

5　2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし, i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2)　$|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3)　右図のように，複素数平面上の △ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A, B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である。点 P_n が △ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



2017年度　九州大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$0<a<2$　(2)　$a=\dfrac{3}{4}$，$\cos 2p=-\dfrac{1}{4}$　(3)　$\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}$

2

(1)　$\mathrm{G}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$　(2)　$\cos\theta=\dfrac{-a^2b^2+a^2+b^2}{a^2b^2+a^2+b^2}$

3

(1)　85（個）　(2)　12（個）　(3)　$n=265$

4

(1)　4 回目：$\dfrac{1}{64}$，7 回目：$\dfrac{11}{4096}$　(2)　$d_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　$a_{n+1}=-\dfrac{1}{64}a_{n-2}+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+3}$

5

(1)　$|z_n|=\dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}$，$\arg z_n=\dfrac{2n+3}{12}\pi$　(2)　$n=14$

(3)　$n=15$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto