2017 年度　名古屋大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　不等式 $0<a<1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x\ (x>0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(o,\ v(s))$ とする。このとき，次の問に答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を証明なしで使ってよい。

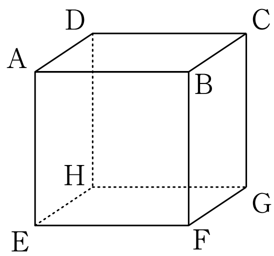
(1)　関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2)　関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

(3)　関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

2

右図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問に答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m<s_m$ となる m をすべて求めよ。

3　xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　ℓ 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a，b，t を使って表せ。

(2)　ℓ が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3)　ℓ が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

4　n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) を満たしている。

(Ⅰ) 集合 M は n 個の要素からなる。

(Ⅱ) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(Ⅲ) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である。ただし，$z = w$ の場合も含める。

このとき，次の問に答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n = 4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

(4)　$n = 6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

2017年度　名古屋大学（前期）

医学部（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$u(s)=s(a-\log s)$，$v(s)=a-\log s$　（2）図示は省略

（3）$\dfrac{4e^{3a}-9e^{2a}+6a+5}{18}\pi$

2

（1）$p_2=0$，$q_2=\dfrac{2}{3}$，$r_2=0$，$p_3=\dfrac{4}{9}$，$q_3=0$，$r_3=\dfrac{2}{9}$

（2）$p_n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n\text{ が奇数})\end{cases}$，$q_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{ が偶数})\\ 0 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$，$r_n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n\text{ が奇数})\end{cases}$

（3）$s_1=\dfrac{1}{3}$，$s_m=\dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-2}$（$m\geqq 2$）

（4）$m=2,\ 3$

3

（1）$\mathrm{Q}(at,\ bt,\ 2-2t)$

（2）$\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1$，図示は省略

（3）$\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1$ かつ $(a-1)^2+b^2>1$ かつ $(a-2)^2+b^2>2$，図示は省略

4

（1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）証明は省略，$M=\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$

（4）証明は省略，$M=\left\{\pm1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}$