2017 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　双曲線 $H: x^2-y^2=1$ 上の 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える。

(1)　点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ。

(2)　点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ。

(3)　点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。

2　複素数 z は $z^5=1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。
複素数 w を $w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ と定める。

(1)　5 回とも表が出たとする。w の値を求めよ。

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$, $a_1=a_4=1$ のとき，$|w|<1$ であることを示せ。

(3)　$|w|<1$ である確率を求めよ。

3　a，b を自然数とし，不等式

$$\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\frac{2}{b^4} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

を考える。次の問いに答えよ。ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a，b に対して

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$$

であることを示せ。

(2)　不等式 (A) を満たす自然数 a，b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ。

4　b，c を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2,\ 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

5　xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1)　t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t = (2\cos\theta)^2 \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ。

(2)　M の体積 V を求めよ。

2017年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\mathrm{P}\left(-1,\ \dfrac{-2t}{s-1}\right)$　(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{s},\ 0\right)$　(3) 証明は省略

2

(1) $w=0$　(2) 証明は省略　(3) $\dfrac{3}{8}$

3

(1) 証明は省略　(2) $(a,\ b)=(8,\ 3)$

4

(1) $\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6$　(2) $5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}$　(3) $S=8\sqrt{6}$

5

(1) $S(t)=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$　(2) $\dfrac{3}{4}\pi$