2017年度　広島大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a_2 = \tan\frac{\pi}{6}$，$a_3 = \tan\frac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2)　一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ。

2　$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

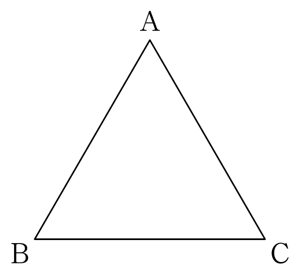
(1)　関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2)　(1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3)　座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

3　表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし，$0<p<1$ である。このとき，右図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

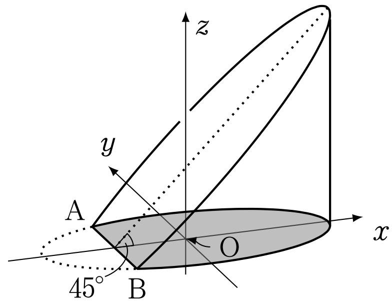
R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで，N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k = 2, 3, \cdots, 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_2，P_3 を求めよ。

(2)　P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

(3)　$p = \frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

4　座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図の灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面 $x = t$ $(-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

5　x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および $\mathrm{A}(50,\ 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ。

(2)　m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3)　P_m を (2) で求めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4)　P_m を (2) で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

2017年度　広島大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略

(2)　$a_n = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$，証明は省略

(3)　$\dfrac{2}{3}\pi$

2

(1)　$-\dfrac{4a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}}+1$

(2)　$\dfrac{27}{32}$

(3)　$\begin{cases} 1 & (0<a<A) \\ 3 & (a=A) \\ 5 & (a>A) \end{cases}$

(4)　$0<a \leqq A$

3

(1)　$P_2 = 2p(1-p)$，$P_3 = p^3+(1-p)^3$

(2)　$P_{2m} = 2p^m(1-p)^m$，$P_{2m+1} = \{p^3+(1-p)^3\}p^{m-1}(1-p)^{m-1}$

(3)　$Q = \dfrac{N}{2^{2N}}$

4

(1)　$\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$S(t) = 2(t+1)\sqrt{1-\dfrac{t^2}{4}}$

(3)　$\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

5

(1)　$(-1,\ 4)$

(2)　$\mathrm{P}_1(-1,\ 4)$，$\mathrm{P}_2(6,\ -21)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}} = (-14k,\ 50k)$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}(7,\ -25)$

(4)　$(0,\ 0)$，$(16,\ -57)$，$(32,\ -114)$，$(48,\ -171)$，$(7,\ -25)$，$(23,\ -82)$，$(39,\ -139)$，$(55,\ -196)$