2017 年度　徳島大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が次を満たす。

$a_n + 2S_n = 3\cdot 2^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1)　a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(3)　$S_1 + 3S_2 + 3^2S_3 + \cdots + 3^{n-1}S_n$ を求めよ。

2　複素数平面上で，原点 O と異なる点 $\mathrm{A}(\alpha)$ をとり，単位円周上に点 $\mathrm{B}(\beta)$ をとる。複素数 α，β は $\arg\alpha - \arg\beta = \dfrac{\pi}{2}$ を満たし，さらに $\alpha + \beta$ は実数でないとする。

(1)　β を α と $|\alpha|$ を用いて表せ。

(2)　線分 AB の垂直 2 等分線と直線 OA との交点を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，γ を α と $|\alpha|$ を用いて表せ。

(3)　$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす原点と異なる虚軸上の点を $\mathrm{P}(z)$ とする。z を α, $\overline{\alpha}$ と $|\alpha|$ を用いて表せ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数である。

3　n を 2 以上の自然数とする。媒介変数 t を用いて $x = \cos^n t$，$y = \sin^4 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される xy 平面上の曲線を C_n とする。また，$t = \dfrac{\pi}{3}$ に対応する点における C_n の接線を ℓ_n とする。曲線 C_n，接線 ℓ_n および y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする。ただし，C_n と ℓ_n の共有点が 1 個であることを証明なしで用いてよい。

(1)　接線 ℓ_n の方程式を求めよ。

(2)　S_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n n S_n$ を求めよ。

4　$n<m$ とする。白玉 n 個と赤玉 m 個が入っている袋から n 個の玉を同時に取り出す。このとき，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，白玉がちょうど k 個出る確率を p_k とする。

(1)　$n = 2$，$m = 3$ のときに，p_0，p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 6$ とする。$p_5 = p_6$ が成り立つような組 (n, m) の中で n が最小となるものを求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。$k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して，$d_k = \left|\dfrac{n}{n+m} - \dfrac{k}{n}\right|$ とする。$d_2>d_3$ および $p_2>p_3$ が同時に成り立つような組 (n, m) の中で n が最小となるものを求めよ。

2017年度　徳島大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2^{n-1}$

(2)　$a_n=\dfrac{3}{5}\cdot 2^{n-1}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3)　$\dfrac{6^{n+1}-5n-6}{25}$

2

(1)　$\beta=-\dfrac{i\alpha}{|\alpha|}$

(2)　$\gamma=\dfrac{|\alpha|^2-1}{2|\alpha|^2}\alpha$

(3)　$z=\dfrac{-i(\alpha+\overline{\alpha})+|\alpha|(\alpha-\overline{\alpha})}{2|\alpha|}$

3

(1)　$y=-\dfrac{3\cdot 2^{n-2}}{n}x+\dfrac{3}{4n}+\dfrac{9}{16}$

(2)　$S_2=\dfrac{1}{192}$

(3)　$\dfrac{3}{8}$

4

(1)　$p_0=\dfrac{3}{10}$，$p_1=\dfrac{3}{5}$，$p_2=\dfrac{1}{10}$

(2)　$(n,\ m)=(17,\ 35)$

(3)　$(n,\ m)=(9,\ 23)$