2017 年度　熊本大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　半径 1 の円に外接する $\triangle$ABC について，$\angle$CAB $= 2x$，$\angle$ABC $= 2y$，$\angle$BCA $= 2z$ とする。$\triangle$ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ。

2　$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$，$\beta = 2-2i$，$\gamma = s+ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle$ACD が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　z を s，t を用いて表せ。

(2)　α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3)　(2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle$DFC $= \theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

3　$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$　$(x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，点 P$(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　接線 ℓ と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2)　(1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $\ell_k : y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　(2) の直線 ℓ_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 ℓ_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

4　n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} に対して，分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{2n}} \quad \cdots (*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_2 を求めよ。

(2)　S_n を与える順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。

2017年度　熊本大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略

(2)　最小値：$3\sqrt{3}$　$(x,\ y) = \left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

2

(1)　$z = \dfrac{s}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(t+1) + i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}s + \dfrac{t-1}{2}\right)$

(2)　$\gamma = 2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 2)$，$z = -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$

(3)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

3

(1)　$t = 2$

(2)　$\begin{cases} k \geqq \dfrac{1}{4} & 1\text{ 個} \\ k \leqq 0 & 2\text{ 個} \\ 0 < k < \dfrac{1}{4} & 3\text{ 個} \end{cases}$

(3)　$k = -6$，面積：$\dfrac{5}{3} + 3\log 6$

4

(1)　$S_2 = \dfrac{11}{2}$

(2)　$a_1 = 2n,\ a_2 = 2n-1,\ \cdots,\ a_n = n+1,\ a_{n+1} = 1,\ a_{n+2} = 2,\ \cdots,\ a_{2n} = n$

(3)　2

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto