2018年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ の範囲で不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，

$$y=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

2　a，b を正の実数とし，$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ とする。

(1)　c を実数とし，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れるとする。このとき，$c>0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a=5$ とする。$f(x)$ がある実数 s，t，u，v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ。

3　2 つの関数

$$f(t)=2\sin t+\cos 2t,\ g(t)=2\cos t+\sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1)　t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2)　t_1，t_2 を $0 \leqq t_1<t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3)　C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

4　座標空間に 6 点

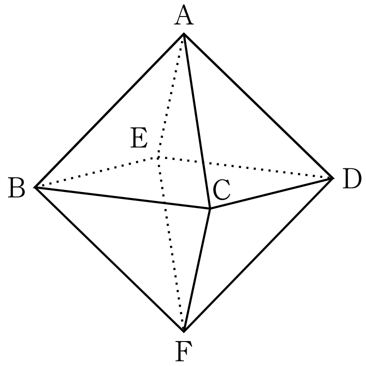
$$A(0,0,1),\ B(1,0,0),\ C(0,1,0),\ D(-1,0,0),\ E(0,-1,0),\ F(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB，AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R，S とする。

(1)　4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ。

(2)　線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s，t が $0<s<1$，$0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3)　正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ。



5　p，q を $0<p<1$，$0<q<1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A，B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする。

(1)　n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

2018年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略　　（2）　$0<y<\frac{1}{2}$

2

（1）　証明は省略　　（2）　証明は省略　　（3）　$b=8$

3

（1）　$f(t)$ の最大値：$\frac{3}{2}$　$\left(t=\frac{\pi}{6}\right)$，$g(t)$ の最大値：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　$\left(t=\frac{\pi}{6}\right)$

（2）　証明は省略

（3）　$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$

4

（1）　証明は省略　　（2）　$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（3）　$s=t=\frac{1}{3}$，最大値：$\frac{5\sqrt{6}}{9}$

5

（1）　$a_n=\frac{(1-p)(p-q)^n+q}{1-p+q}$　　（2）　$b_n=\frac{1}{2}(n-2)\{2p+(n-3)q\}p^{n-4}(1-p)^2q$