2018 年度　徳島大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　n を自然数とし，$S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とする。

(1)　$x>0$ のとき $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上に点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ をとり，$\angle\mathrm{POQ} = \theta$ となる点 $\mathrm{Q}\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$（$x>0$）をとる。ただし，O は原点とする。

(1)　$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{\cos 2\theta}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{POQ} = \theta$ となる点 Q はちょうど 2 個存在することを示せ。また，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，その 2 点間の距離を求めよ。

(3)　点 Q を与える 2 点を $\mathrm{Q}_1\left(x_1,\ \dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(x_2,\ \dfrac{1}{x_2}\right)$（$x_1<x_2$）とする。さらに，$a_1<0<b_1$ とし，4 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{Q}_3\left(-x_1,\ -\dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_4\left(-x_2,\ -\dfrac{1}{x_2}\right)$ を考える。A，B，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 が原点を中心とする正六角形の頂点になるとき，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ となることを示せ。また，このときの A，B の座標を求めよ。

3　曲線 $y = e^{3x}$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{3t})$ における接線および法線と x 軸の交点をそれぞれ $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ および $\mathrm{R}(b,\ 0)$ とする。曲線 C，2 直線 $x = a$，$x = t$ および x 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = e : 9$ を満たす t の値を求めよ。

(2)　$S(t) = e - 1$ を満たす t の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $T(t)$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{e^{6t}S(t)}{T(t)}$ を求めよ。

4　n を 3 以上の整数とする。n 人がそれぞれ 1 個ずつさいころを持っている。n 人が同時にさいころを投げ，出た目が 2 種類のときは小さい目を出した人を敗退とし，その後の勝負には加わらない。出た目が 1 種類あるいは 3 種類以上のときは誰も敗退しない。敗退しなかった人が 2 人以上のときは同様の勝負を繰り返す。最後に残った 1 人を優勝者とする。ただし，$(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ を利用してもよい。

(1)　1 回目の勝負で優勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　1 回目の勝負では誰も敗退しない確率を求めよ。

(3)　1 回目の勝負では敗退する人はでるが優勝者が決まらず，2 回目の勝負で優勝者が決まる確率を求めよ。

2018 年度　徳島大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）証明は省略　（2）証明は省略　（3）2

2

（1）証明は省略　（2）証明は省略，2

（3）証明は省略，A$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，B$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

3

（1）$t=\dfrac{\log 3-1}{3}$　（2）$t=\dfrac{\log 3+1}{3}$　（3）$\dfrac{2(e-1)}{9e}$

4

（1）$\dfrac{15n}{6^n}$　（2）$1-\dfrac{15(2^n-2)}{6^n}$　（3）$\dfrac{225n(7^{n-1}-6^{n-1}-1)}{6^{2n}}$