2018 年度　東京慈恵会医科大学（前期）

医学部　　試験時間：90 分　　全問必答

1　次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　1 の数字が書かれたカードが 1 枚，2 の数字が書かれたカードが 2 枚，3 の数字が書かれたカードが 3 枚，4 の数字が書かれたカードが 4 枚の合計 10 枚のカードがある。カードをよく混ぜて，1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し，取り出した順に左から並べて 3 桁の整数 N をつくる。このとき，N が 3 の倍数である確率は $\boxed{\text{（ア）}}$，6 の倍数である確率は $\boxed{\text{（イ）}}$ である。

(2)　実数 x，y が $|2x+y|+|2x-y|=4$ をみたすとき，$2x^2+xy-y^2$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{（ウ）}} \leqq 2x^2+xy-y^2 \leqq \boxed{\text{（エ）}}$$ である。

2　n は自然数とし，微分可能な関数 $f_n(x)$ は等式 $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)\,dt$ をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$\dfrac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ。

(2)　m は 2 以上の自然数とする。$x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}x^m \leqq e^{-m}m^m$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

3　自然数 n に対して，整式 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^2+x-\frac{1}{4}$$
$$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))\quad (n \geqq 2)$$

$f_n(x)$ を x^2 で割ったときの余りを a_nx+b_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，b_2 の値を求めよ。

(2)　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

4　O を原点とする座標空間内に，定点 A$(4,\ 0,\ 0)$ と 3 点 P$(4\cos\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta)$，Q$\left(4\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$，R があり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ をみたしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ の最大値と，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ が最大となるときを考える。O を端点とし線分 PR の中点を通る半直線上に，点 M を $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=4$ となるようにとるとき，$\triangle$MOA の面積を求めよ。

2018 年度　東京慈恵会医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア：$\dfrac{41}{120}$　イ：$\dfrac{13}{60}$

(2)　ウ：$-\dfrac{9}{2}$　エ：$\dfrac{9}{4}$

2

(1)　$(n+1)e^{-x}x^n$　(2)　証明は省略　(3)　$(n+1)!$

3

(1)　$a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=-\dfrac{7}{16}$　(2)　0

4

(1)　最大値：$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(2)　$4\sqrt{2}$