2018 年度　横浜市立大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　以下の問いに答えよ。ただし，解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)　$p^3+q^3=35$ が成り立つような素数 p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

(2)　方程式

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}}=1-2x^2$$

をみたす実数 x をすべて求めよ。

(3)　鋭角三角形 ABC の垂心を O とし，点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を A′，点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を C′ とする。また，A″，C″ を $\overrightarrow{\mathrm{AA''}}=2\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC''}}=2\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ をみたす点とする。三角形 OBC，OAC，OAB の面積をそれぞれ α，β，γ とするとき，三角形 OA″C″ の面積を α，β，γ を用いて表せ。

(4)　6^{74} の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=0.6021$，$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}6=0.7782$，$\log_{10}7=0.8451$，$\log_{10}8=0.9031$，$\log_{10}9=0.9542$ とする。

2　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ について，方程式

$$f'(x)=0$$

がただ 1 つの実数解を持つことを証明せよ。

(2)　(1) におけるただ 1 つの実数解を x_0 とする。このとき

$$a\leqq x_0\leqq a+\frac{1}{4}$$

をみたす実数 a を 1 つ求めよ。

(3)　不等式

$$\frac{5}{8}<f(x_0)<\frac{11}{16}$$

を証明せよ。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　n を素数でない 4 以上の整数とする。このとき，n^2 の約数 d で，$n<d<n^2$ をみたすものが存在することを証明せよ。

(2)　整数 $\sum_{k=0}^{50} {}_{101}\mathrm{C}_k$ の約数の個数を求めよ。

(3)　$X = 3^4 \cdot ({}_{11}\mathrm{C}_0 + {}_{11}\mathrm{C}_1 + {}_{11}\mathrm{C}_2 + {}_{11}\mathrm{C}_3 + {}_{11}\mathrm{C}_4 + {}_{11}\mathrm{C}_5)$ とし，全体集合 $U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ X\}$ を考える。U の部分集合 A，B，C を

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } X \text{ の約数 }\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } X^2 \text{の約数 }\}$$

$$C = \{x \mid x = 1,\ 2,\ \cdots,\ X-1\}$$

とする。

(ア) X^2 の約数で，かつ X より小さく，X の約数でないような整数からなる U の部分集合を D とする。D を A，B，C を用いて表せ。

(イ) (ア) における D の要素の個数を求めよ。

4　以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $\tan x$ の導関数を求めよ。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，

$$2n\int \frac{1}{\cos^{2n+1} x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^{2n-1} x} + (2n-1)\int \frac{1}{\cos^{2n-1} x}\,dx$$

が成り立つことを証明せよ。

(4)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$ を求めよ。

2018 年度　横浜市立大学（前期）

医学部（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(2)　$x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3)　$\dfrac{\beta(2\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+2\gamma)}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}$

(4)　桁数：58，最高位の数字：3

2

(1)　証明は省略

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$

(3)　証明は省略

3

(1)　証明は省略

(2)　202

(3)　(ア)　$D=B\cap C\cap\overline{A}$　(イ)　40

4

(1)　$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(2)　$\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C$　（C は積分定数）

(3)　証明は省略

(4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$