# 2018 年度　福井大学（前期）

## 医学部　試験時間：110 分

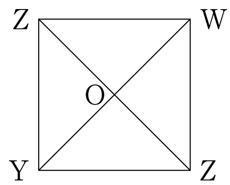
全問必答

**1**　方程式 $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つを $\omega$ とする。複素数平面上で，原点 O でない点 A$(z)$ に対して 5 点 B$(-z\overline{\omega})$，C$(z\omega)$，D$(-z)$，E$(z\overline{\omega})$，F$(-z\omega)$ をとる。以下の問いに答えよ。ただし，$i$ は虚数単位とする。

(1)　$z = 1 + 2i$ のとき，三角形 ACE と三角形 BDF の共通部分の面積を求めよ。

(2)　六角形 ABCDEF の各頂点と O を線分で結ぶと，この六角形は 6 個の三角形に分割される。動点 P は O を出発して，1 秒後に辺で結ばれている点のいずれかに移動する。さらに，その点を出発してこの移動を繰り返す。ただし，P は今いる点からその点と辺で結ばれている点へは等しい確率で移動する。例えば，下図のような四角形の場合では

- P が O にいるときは X，Y，Z，W のいずれかに $\frac{1}{4}$ の確率で移動する。
- P が X にいるときは Y，O，W のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。




(i)　P が 2 秒後に O にいる確率 $p_2$，3 秒後に O にいる確率 $p_3$ をそれぞれ求めよ。

(ii)　P が $n$ 秒後に O にいる確率 $p_n$ を求めよ。ただし，$n$ は自然数とする。

**2**　実数から実数への関数 $f(x)$ は，次の 2 つの条件を満たす。

- 任意の実数 $x$，$y$ に対して，$|f(x) - f(y)| = |x - y|$
- $x$ が整数のとき，$f(x)$ も整数

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はどの値も固定しない，すなわち，任意の実数 $x$ に対して $f(x)$ は $x$ と異なるとき，$f(x) = x + n$（$n$ は 0 以外の整数）となることを示せ。

(2)　$f(x)$ が 1 点 $x_0$ のみを固定するとき，すなわち，ただ 1 つの実数 $x_0$ に対して $f(x_0) = x_0$ となるとき，$x_0$ を $f(0)$ を用いて表せ。

(3)　$f(x)$ が 2 点以上の点を固定するとき，すなわち，少なくとも 2 つの実数 $x_1$，$x_2$（$x_1 \neq x_2$）に対して $f(x_1) = x_1$ かつ $f(x_2) = x_2$ となるとき，任意の実数 $x$ に対して $f(x) = x$ となることを示せ。

**3**　座標空間において，$xy$ 平面上の BD = CD である二等辺三角形 BCD を，直線 BC を回転軸として $z$ 軸正方向へ $60^\circ$ 回転したとき，頂点 D の回転後の点を A とする。もとの二等辺三角形 BCD を底面，A を頂点とする四面体 ABCD を作る。さらに辺 AB を 3 : 1 に内分する点，辺 BC の中点，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を，それぞれ L，M，N とし，3 点 L，M，N を通る平面と直線 AD との交点を S とする。また四面体 ABCD の体積を $V$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\mathrm{AS}}{\mathrm{DS}}$ を求めよ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{AMS}$ を求めよ。

(3)　BD = 1 のとき，$V$ の最大値とそのときの辺 AD の長さをそれぞれ求めよ。

**4**　$x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は，等式

$$(x+1)f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 2\log(x+1) + x - 2$$

を満たす。以下の問いに答えよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

(1) (i)　$f(x)$ を求めよ。

(ii)　方程式 $f(x) = 0$ は，開区間 $(0,\ e)$ に実数解をただ 1 つもつことを示せ。

(2)　$h(x) = f(x) + \dfrac{2}{x+1}$ とおき，$h(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

(i)　$g(x)$ を求めよ。

(ii)　自然数 $n$ に対して，

$$P(n) = g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|P(n)\right|$ を求めよ。

# 2018 年度　福井大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

**1**

(1) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) (i) $p_2=\dfrac{1}{3}$，$p_3=\dfrac{2}{9}$　(ii) $p_n=\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

**2**

(1) 証明は省略　(2) $x_0=\dfrac{1}{2}f(0)$　(3) 証明は省略

**3**

(1) 2　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$　(3) 最大値：$\dfrac{1}{9}$，$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

**4**

(1) (i) $f(x)=-\dfrac{2}{x+1}+\log(x+1)$　(ii) 証明は省略

(2) (i) $g(x)=e^x-1$　(ii) 1