2019 年度　大阪大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1)　b を実数とする。関数

$$f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ。

(2)　$a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。

$$I_n=\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$$

を求めよ。ただし，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$$

を用いてもよい。

2　自然数 a，b に対し，

$$w=\cos\frac{a\pi}{3+b}+i\sin\frac{a\pi}{3+b}$$

とおく。ただし，i は虚数単位とする。複素数 z_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を以下のように定める。

$$z_1=1,\ z_2=1-w,\ z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$a=4$，$b=3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2)　$a=2$，$b=1$ のとき，z_{63} を求めよ。

(3)　さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63}=0$ である確率を求めよ。

3　実数 s，t が $s^2+t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき，xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

(2)　A を図示せよ。

(3)　A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

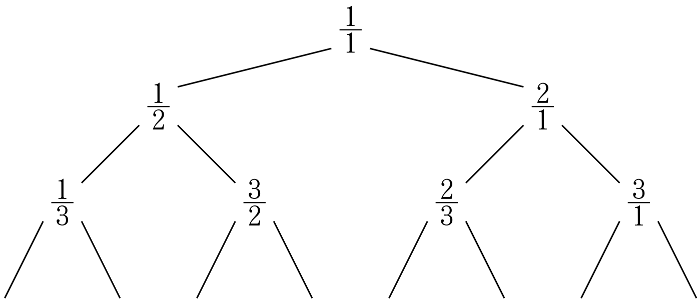
4　下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす。

(2)　すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。

(3)　この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。

(4)　$\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。



5　座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

2019年度　大阪大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略　　（2）　証明は省略　　（3）　$-\frac{1}{2}$

2

（1）　図示は省略　　（2）　$-i$　　（3）　$\frac{7}{36}$

3

（1）　領域 A の点ではない。　　（2）　図示は省略

（3）　$\frac{16}{5}(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6})\pi$

4

（1）　証明は省略　　（2）　証明は省略

（3）　証明は省略　　（4）　11 段目の左から 29 番目

5

（1）　$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$

（2）　$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3$, $\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$