# 2019 年度　大阪市立大学（前期）

## 医学部　試験時間：120 分

全問必答

**1**　座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を $C_t$，$C_t$ で囲まれた領域を $D_t$ とする。$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，$D_0$ と $D_t$ の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$0<t<2$ に対し，$C_0$ と $C_t$ の交点のうち $y$ 座標が正の方を $\mathrm{P}_t$ とする。座標平面の原点を O として，半直線 $\mathrm{OP}_t$ と $x$ 軸の正の向きのなす角を $\theta$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を $\theta$ を用いて表せ。

(2)　$0<t<2$ のとき，$t$ を $\theta$ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ。

**2**　0 でない複素数 $z$ に対して

$$w=z+\frac{1}{z}$$

とおく。$i$ を虚数単位とし，$z$ の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。また，$w$ の実部を $u$，$w$ の虚部を $v$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$u$，$v$ をそれぞれ $r$ と $\theta$ を用いて表せ。

(2)　点 $z$ が条件 $|z+1|=|z-i|$（$0<\theta<\pi$）を満たして複素数平面上を動くとき，$u$ と $v$ が満たす関係式を求め，点 $w$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。また，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}u$ と $\displaystyle\lim_{r\to 0}v$ を求めよ。

**3**　$k$ は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1),\ \mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1),\ \mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，線分 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $k$，$s$，$t$ を用いて表せ。

(3)　(2) の内分点 P と Q で，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものが存在するとき，P と Q の座標を求めよ。また，そのような P と Q が存在するための $k$ の条件を求めよ。

(4)　$k$ は (3) で求めた範囲にあるとする。(3) の P，Q と線分 PQ 上の点 X に対し $\triangle\mathrm{XOA}$ と $\triangle\mathrm{XBC}$ の面積が一致するとき，その面積を求めよ。

**4**　自然数 $n$，$s$（$s<n$）に対して

$$I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s\,dx$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$s<n-1$ のとき，等式

$$I_n(s)=\frac{n-s}{s+1}I_n(s+1)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$I_n(s)$ を $n$ と $s$ を用いて表せ。

(3)　自然数 $n$，$s$（$s<n$）に対して，等式

$$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{n+1}{n-s+k+1}{}_s\mathrm{C}_k$$

が成り立つことを示せ。ただし，${}_s\mathrm{C}_0={}_s\mathrm{C}_s=1$ とする。

# 2019 年度　大阪市立大学（前期）

## 医学部　（略解）

証明，図示などは省略

### 1

(1)　$S(t)=2\theta-\sin 2\theta$　　(2)　$t=2\cos\theta$　　(3)　$\frac{8}{3}$

### 2

(1)　$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$

(2)　$\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}=1,\ v<-u,\ \lim_{r\to\infty}u=-\infty,\ \lim_{r\to 0}v=-\infty$，図示は省略

### 3

(1)　$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{n}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(4k-s+4t,\ -2k-s-2t+2,\ -k+s-t+1)$

(3)　$\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ -\frac{2}{3}<k<\frac{1}{3}$

(4)　$\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}$

### 4

(1)　証明は省略　　(2)　$I_n(s)=\frac{(n-s)!s!}{(n+1)!}$　　(3)　証明は省略