2019 年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部　試験時間：180 分

試験時間：他教科との 3 教科で 180 分

1　以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させよ。

1 から 9 までの数字が書かれたカードが各 1 枚，合計 9 枚箱に入っている。箱から同時に何枚かのカードを取り出す。取り出したカードに書かれた数の合計を S とする。

(1)　箱から 2 枚のカードを取り出すとき，S が 2 で割り切れる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　箱から 3 枚のカードを取り出すとき，S が 2 で割り切れる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3)　箱から 2 枚のカードを取り出すとき，S が 3 で割り切れる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4)　箱から 3 枚のカードを取り出すとき，S が 3 で割り切れる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(5)　箱から 3 枚のカードを取り出すとき，S が 6 で割り切れる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

2　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

n は 0 以上の整数とする。整数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $(3+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ を満たすとする。このとき，$a_0 = \boxed{\text{ア}}$，$b_0 = \boxed{\text{イ}}$ であり，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は次の漸化式を満たす。

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\,a_n + \boxed{\text{エ}}\,b_n,$$

$$b_{n+1} = a_n + \boxed{\text{オ}}\,b_n$$

ところで，$(3-\sqrt{5})^n$ を a_n，b_n を用いて表すと $(3-\sqrt{5})^n = a_n - \boxed{\text{カ}}\,b_n$ であることから，一般項は

$$a_n = \boxed{\text{キ}},$$

$$b_n = \boxed{\text{ク}}$$

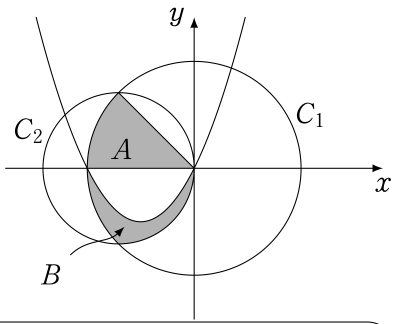
となる。0 以上の実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表し，x の小数部分を $\langle x\rangle = x - [x]$ と表す。x が 0 以上の実数全体を動くとき，$\langle x\rangle$ の取りうる値の範囲は $\boxed{\text{ケ}}$ である。$0<(3-\sqrt{5})^n<1$ であることに注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle(3+\sqrt{5})^n\right\rangle = \boxed{\text{コ}}$$

となることが分かる。

3　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

xy 平面の原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C_1，原点で y 軸に接し，中心の x 座標が負である半径 1 の円を C_2 とする。原点および C_1 と x 軸の交点を通る放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + ax$ が右図のように重なっている。このとき，$a =$ $\boxed{\text{ア}}$ で，この放物線と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，C_1 と C_2 の 2 つの交点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ で，扇形 A の面積は $\boxed{\text{エ}}$，C_1，C_2 と放物線で囲まれた図形 B の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。（脚注参照）



（脚注）C_1 と C_2 の交点のうち y 座標が正のものを P とする。C_1 と x 軸の交点のうち x 座標が負のものを Q とする。扇形 A は，線分 OP，OQ と円 C_1 の劣弧 PQ で囲まれる図形である。ただし，劣弧とは円周上の 2 点によって円周を分けたときの，半円より小さい方の弧のことである。図形 B は，C_1 と C_2 両方の円に囲まれ，さらに放物線より下にある部分である。

4　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

xyz 空間の原点を中心とする球面 S 上に点 A, B, C があり，各点の座標はそれぞれ (2，3，1)，(3，1，2)，(1，2，3) である。点 A，B，C を中心とする半径 t の球面をそれぞれ S_A，S_B，S_C とする。

(1)　S_A と S の交わりが円となるための t の範囲は $\boxed{\text{ア}} < t < \boxed{\text{イ}}$ である。この円を C_A と表す。このとき，同様に S_B と S の交わり C_B，S_C と S の交わり C_C も円になる。以下では上記の t の範囲で考える。

(2)　円 C_A の半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　円 C_A と円 C_B が共有点をもつような半径 t の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ で，その共有点の座標は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4)　3 つの円 C_A，C_B，C_C のすべてに共有される点が存在する場合を考える。そのような t の値はいくつかあり，そのうち最小のものは $t =$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

5　以下の問に答えよ。

直線上で距離 L だけ離れた 2 地点 P，Q を考える。時刻 $t = 0$ に初速 c_A で P を出発して Q に向かって動き出した移動体 A の時刻 t での速度が，$v_A(t) = c_A e^{-kt}$ であるとする。ただし，c_A も k も正の定数である。時刻 T に A がいる地点を R とする。同時刻 T に R を出発し Q に向かう移動体 B の，時刻 $t (\geqq T)$ での速度は $v_B(t) = c_B e^{-k(t-T)}$ であるとする。ただし，c_B は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1)　移動体 A，B の時刻 t までの移動距離をそれぞれ $x_A(t)$，$x_B(t)$ で表す。$t \geqq 0$ に対し $x_A(t)$ を，$t \geqq T$ に対し $x_B(t)$ を求めよ。さらに，移動体 A，B の移動可能距離の上限，すなわち以下に定義する量 L_A，L_B を求めよ。

$$L_A = \lim_{t \to \infty} x_A(t),\ L_B = \lim_{t \to \infty} x_B(t)$$

(2)　$L_A < L$，$L_B < L$，$L_A + L_B > L$ の条件のもとで，移動体 B が Q に到達する時刻を t_0 とする。t_0 が最小となるような R が定まる。そのときの PR 間の移動を L_A，L_B，L を用いて表せ。

2019 年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1　ア：$\frac{4}{9}$　イ：$\frac{11}{21}$　ウ：$\frac{1}{3}$　エ：$\frac{5}{14}$　オ：$\frac{4}{21}$

2　ア：1　イ：0　ウ：3　エ：5　オ：3　カ：$\sqrt{5}$

キ：$\frac{1}{2}\left\{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\right\}$　ク：$\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\right\}$　ケ：$0 \leqq \langle x \rangle < 1$　コ：1

3　ア：2　イ：$\frac{2}{3}$　ウ：$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$　エ：$\frac{\pi}{4}$　オ：$\frac{\pi}{2}-\frac{7}{6}$

4　ア：0　イ：$2\sqrt{14}$　ウ：$\frac{t\sqrt{56-t^2}}{2\sqrt{14}}$　エ：$\sqrt{28-10\sqrt{7}}$　オ：$\left(\sqrt{7},\ \frac{4\sqrt{7}}{5},\ \frac{3\sqrt{7}}{5}\right)$　カ：$2\sqrt{7-\sqrt{42}}$

5

(1)　$x_A(t)=\frac{c_A}{k}(1-e^{-kt})$，$x_B(t)=\frac{c_B}{k}\{1-e^{-k(t-T)}\}$，$L_A=\frac{c_A}{k}$，$L_B=\frac{c_B}{k}$

(2)　$\frac{L_A-L_B+L}{2}$