2019 年度　川崎医科大学（前期）

医学部　　試験時間：80 分　　全問必答

1　半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円に内接する四角形 ABCD において，三角形 ABD は正三角形であるとする。線分 AC と線分 BD の交点を E とし，点 E は BD を 1 : 2 に内分する点であるとする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \boxed{\text{ア}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boxed{\text{イ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3)　点 A を通る直径の他端を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\text{ であり，}\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boxed{\text{ソ}}\text{ である。}$$

実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \boxed{\text{タ}}$ であるから，$t = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ となる。

(4)　正三角形 ABD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり，四角形 ABCD の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

2　箱 A には赤球 1 個と白球 1 個が，箱 B には赤球 1 個と白球 2 個が入っている。2 つの箱から同時に 1 個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。n 回の操作後，箱 A に，赤球が 2 個入っている確率を a_n，赤球が 1 個だけ入っている確率を b_n，赤球が入っていない確率を c_n とする。

(1)　$a_1=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$b_1=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　任意の自然数 n について，

$$a_n+b_n+c_n=\boxed{\text{オ}}$$

$$a_{n+1}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}b_n$$

$$b_{n+1}=a_n+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}b_n+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}c_n$$

が成り立つ。

(3)　A，B，C を実数とし，b_n に関する漸化式

$$b_{n+2}+Ab_{n+1}-Bb_n=C$$

が成り立つとする。

(i)　$A=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，$B=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$C=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(ii)　$p_n=b_n-x$ とし，$p_{n+2}+Ap_{n+1}-Bp_n=0$ が成り立つとする。

このとき，$x=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

さらに，実数 α，β（$\alpha<\beta$）が $(p_{n+2}-\alpha p_{n+1})=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n)$ を満たすとする。このとき，$\alpha=-\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，$\beta=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

このことから，任意の自然数 n について，

$$b_n=\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\alpha^n+\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}\beta^n+\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

が成り立つ。したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ となる。

3　$0 \leqq t \leqq \pi$ とする。原点を O とし，点 A の座標を $(\cos t, \sin t)$ とする。点 O を，点 A を中心に時計回りに $3t$ 回転移動させた点を P とし，点 P の座標を $(f(t), g(t))$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により，

$$f(t) = \cos t \boxed{\text{ア}} \cos \boxed{\text{イ}} t,\ \ g(t) = \sin t \boxed{\text{ウ}} \sin \boxed{\text{エ}} t$$

である。ここで，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は，それぞれ，符号 ＋，－ のいずれかである。

(2)　$t = a$ において $f(t)$ が最大値をとるとき $\cos a = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，$f(a) = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3)　$0<c<\pi$ とし，$t = c$ のとき点 P は原点にあるとする。

(i)　$c = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

(ii)　$\displaystyle\int_0^c \sin^2 t\,dt = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$\displaystyle\int_0^c \sin t \sin 2t\,dt = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(iii)　t が $0 \leqq t \leqq c$ の範囲を動くとき，点 P が描く曲線で囲まれる図形の面積を S とする。
$S = \displaystyle\int_0^c g(t)f'(t)\,dt$ が成り立つことを用いると，

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

である。

2019 年度　川崎医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) ア：1　イ：1　$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}:\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}:\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}:\dfrac{7}{9}$

(3) $\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}:\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}:\dfrac{2}{3}$　ソ：1　タ：0　$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}:\dfrac{9}{7}$

(4) $\dfrac{\sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}}:\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　$\dfrac{\text{ナ}\sqrt{\text{ニ}}}{\text{ヌネ}}:\dfrac{9\sqrt{3}}{28}$

2

(1) $\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}:\dfrac{1}{6}$　$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}:\dfrac{1}{2}$

(2) オ：1　$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}:\dfrac{1}{6}$　$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}:\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}:\dfrac{2}{3}$

(3) $\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}:\dfrac{1}{6}$　$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソタ}}:\dfrac{1}{18}$　$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}:\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}:\dfrac{3}{5}$
$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}:\dfrac{1}{6}$　$\dfrac{\text{ノ}}{\text{ハ}}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{\text{ヒ}}{\text{フヘ}}:\dfrac{1}{15}$　$\dfrac{\text{ホ}}{\text{マ}}:\dfrac{3}{5}$　$\dfrac{\text{ミ}}{\text{ム}}:\dfrac{3}{5}$

3

(1) ア：$-$　イ：2　ウ：$+$　エ：2

(2) $\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}:\dfrac{1}{4}$　$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}:\dfrac{9}{8}$

(3) $\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}:\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}:\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　$\dfrac{\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}:\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}:\dfrac{1}{3}$