2019 年度　昭和大学（前期）

医学部　試験時間：140 分（英数合わせて）

全問必答

1　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

複素数平面上の点 $z_0 = x_0 + iy_0$ を考える。また z_0 を極形式で表した場合の絶対値を r，偏角を θ_0 とし，θ を $0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。原点 O を中心とし，点 z_0 を正の向きに角 θ（ラジアン）回転させた点と O を結ぶ線分を 1 : 2 に内分する点を $z_1 = x_1 + iy_1$ とする。次に O を中心とし，点 z_1 を正の向きに角 θ 回転させた点と O を結ぶ線分を 1 : 2 に内分する点を $z_2 = x_2 + iy_2$ とする。以下同様にし，点 $z_n = x_n + iy_n$ を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　z_n を r，θ_0，θ および n を用いて表せ。

(2)　$z_{n+1} - z_n = t(z_1 - z_0)$（$t$ は実数）となるような正の整数 n があるとき，n を求めよ。

(3)　z_0，z_1，$\cdots$，z_n の実部を x 座標，虚部を y 座標とした xy 平面上の点を $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$，$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ とする。$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ の和を r，θ を用いて表せ。

2　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

1 から 99 までの自然数からなる集合を U とする。以下の問いに答えよ。

(1)　U の要素から重複せず 50 個の要素を取り出した集合を X とする。X の作り方が x 通りあるとするとき，x の約数のうち，3^a（a は自然数）の形で表せる数で最大のものを求めよ。

(2)　U の要素のうち，正の約数の個数が 100 の正の約数の個数よりも大きい要素はいくつあるか。また，そのうち正の約数の和が 100 の正の約数の和よりも大きくなる要素 n をすべて求めよ。

3　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$3x+7y=2019$ を満たす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で何個あるか求めよ。

(2)　2 つの 3 次関数

$$f(x)=x^3+3x^2-1 \text{ と } g(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{ がある。}$$

方程式 $f(x)=0$ の解を α，β，γ とするとき，方程式 $g(x)=0$ の解は α^2，β^2，γ^2 である。a，b，c の値をそれぞれ求めよ。

(3)　1 つのサイコロを投げることをくり返し，出た目の和が 5 以上になったら終わることにする。

(i)　1 回投げて終わる確率を求めよ。

(ii)　2 回投げて終わる確率を求めよ。

(iii)　終わるまでに投げる回数の期待値（平均値）を求めよ。

4　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ のとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

(2)　曲線 $\left|\log_3 x\right|+\left|\log_3 y\right|=2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3)

$$\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$$

を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

2019年度　昭和大学（後期）

医学部　試験時間：140 分（英数合わせて）

全問必答

1　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

複素数平面上で，複素数 z の表す点が原点を中心とする半径 1 の円周上を動く。このとき，次の問いに答えよ。ただし i は虚数単位とする。

(1)　方程式 $z^{12}=1$ を満たす z の値をすべて求めよ。

(2)　単位円の円周上を動き，虚部を正とする複素数 α に対し，$w=(1-\sqrt{3}i)\alpha-(1+i)$ で表される点の軌跡を複素数平面上に図示せよ。

(3)　(2) で求めた軌跡上の点のうち，$\left(\dfrac{w+1+i}{2}\right)^{12}=1$ を満たすものをすべて答えよ。また，それらの点を (2) で描いた図中に示せ。

2　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　次のような数列

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{10}{7},\ \frac{12}{7},\ \frac{2}{9},\ \cdots$$

を考える。このとき，分母の値が等しいものを一つの群とする。$n \geqq 2$ のとき，n 群に含まれる数列の項数を a_n とすると，a_n は等差数列をなす。

(i)　第 n 群の末項は初項から数えて何項目か。

(ii)　初項から第 31 群の最後の項までの総和を求めよ。

(iii)　初項からの和が最初に 2019 を超えるのは第何群の何項目か。

(2)　座標空間において，点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(i)　点 P が zx 平面上を動くとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ の最小値を求めよ。また，直線 AP の方程式を求めよ。

(ii)　点 Q が y 軸上を，また点 R が z 軸上を動くとき，$\mathrm{AQ}+\mathrm{QC}+\mathrm{AR}+\mathrm{RB}$ の最小値を求めよ。また，直線 QR の方程式を求めよ。

3　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\log_2 5 < \dfrac{n}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(2)　ある円に内接する正六角形の面積を S_1，外接する正六角形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(3)　下のデータの中央値を求めよ。

14，29，54，11，63，53，4，78，25，9

(4)　1 から 6 までの数字が記入された球が 1 球ずつある。これらの球を袋の中に入れ，3 つの球を無作為に取り出すとき，その中の最小の数字を X とする。

(i)　$X = 2$ となる確率を求めよ。

(ii)　X の期待値（平均値）を求めよ。

4　次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　曲線 $y = x(x-a)(2x-a)$ と直線 $y = -x + t$ が $0 \leqq t \leqq a$ であるようなすべての t に対して相異なる 3 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$ を求めよ。

(3)　$f'(2) = 3$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ について

$$\int_{2-\pi}^{2+\pi} f(x)\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

の値を求めよ。

2019 年度　昭和大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $r\left(\frac{2}{3}\right)^n\{\cos(\theta_0+n\theta)+i\sin(\theta_0+n\theta)\}$

(2) $n=\dfrac{\log|t|}{\log 2-\log 3}$

(3) $\dfrac{1}{15}r^2\sin\theta(13-12\cos\theta)$

2

(1) 81

(2) 7 個，84，90，96

3

(1) 96 個

(2) $(a,\ b,\ c)=(-9\ ,\ 6,\ -1)$

(3)

(i) $\dfrac{1}{3}$　(ii) $\dfrac{1}{2}$　(iii) $\dfrac{2401}{1296}$

4

(1) $-\dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{160}{9}\log 3$

(3) $\dfrac{8}{3}\pi$

2019年度　昭和大学（後期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $z=\pm1,\ \pm i,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2},\ \pm\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \pm\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(2) 図示は省略

(3) $w=\sqrt{3}-1-2i,\ 1-i,\ \sqrt{3}-1,\ (\sqrt{3}-1)i,\ -1+i$

2

(1)

(i) n^2-n+1　　(ii) 932　　(iii) 第 46 群の 58 項目

(2)

(i) 最小値：$\sqrt{6+\sqrt{2}}$，直線 AP：$x=(\sqrt{2}-1)(1-y)=\dfrac{z-2}{2\sqrt{2}}$

(ii) 最小値：$5\sqrt{2}$，直線 QR：$y+z=3,\ x=0$

3

(1) 7

(2) $\dfrac{3}{4}$

(3) 27

(4)

(i) $\dfrac{3}{10}$　　(ii) $\dfrac{7}{4}$

4

(1) $a>2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{\pi}{4}$

(3) 24