2019 年度　獨協医科大学（前期）

医学部　　試験時間：120 分（英数合わせて）

全問必答

1　次の各問に答えよ。

(1)　方程式 $4^x-2^{x+3}+9^{\log_3 4}-4=0$ ……$(*)$ の解を求めたい。$t=2^x$ とおくと，$(*)$ は $t^2-\boxed{ア}\,t+\boxed{イウ}=0$ と表される。これを t について解くと，$t=\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ $\left(ただし\ \boxed{エ}<\boxed{オ}\right)$ である。したがって，$(*)$ の解は，$x=\boxed{カ}$，$\log_2\boxed{キ}$ である。

(2)　a は $a>0$，$a\neq 1$ を満たす定数とする。x の不等式

$$\log_a(x-3)-\log_{a^2}(5-x)<\log_a\sqrt{x}$$

の解は

$a>1$ のとき $\boxed{ク}<x<\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

$0<a<1$ のとき $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}<x<\boxed{ス}$

である。

(3)　i を虚数単位とし，$\alpha=-2+2\sqrt{3}i$，$\beta=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ とする。$0\leqq\arg\alpha<2\pi$，$0\leqq\arg\beta<2\pi$ として，α と β を極形式で表すと

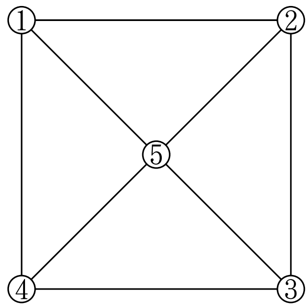
$$\alpha=\boxed{セ}\left(\cos\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi+i\sin\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi\right)$$

$$\beta=\frac{1}{\boxed{チ}}\left(\cos\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\pi+i\sin\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\pi\right)$$

となる。

複素数平面における原点を O とする。自然数 n に対して，複素数 $4\beta^{n-1}$ と $\alpha\beta^{n-1}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ A_n と B_n で表すことにする。三角形 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の周と内部の領域を D_n とし，領域 D_1，D_2，……，D_n の和集合の表す領域の面積を S_n とする。D_2 の面積は $\sqrt{\boxed{ト}}$ であり，$S_2=\dfrac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ である。また，$S_n=S_{n-1}$ を満たす最小の自然数 n（$n\geqq 2$）の値は $n=\boxed{ネ}$ である。

2　右図のような正方形があり，2 本の対角線が引かれている。4 つの頂点と対角線の交点に，図のように ① から ⑤ の番号が打たれ，それらに 1 個ずつ，合計 5 個の白石が置かれている。1 個のサイコロを投げ，出た目が 1 から 5 のときは，その目と同じ番号にある石を，それが白石ならば黒石に，黒石ならば白石に置きかえ，出た目が 6 のときはいずれの石も置きかえない，という試行を行う。



n は正の整数とする。

(1)　「n 回の試行の後，3 点 ①，⑤，③ にある石がすべて同色である確率」を a_n とする。

$a_1 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$a_2 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。a_{n+1} を a_n を用いて表すと，

$a_{n+1} = \dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}} a_n + \dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから，$a_n = \dfrac{1}{\boxed{\text{キ}}} \left(1 + \dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}^{\,n-1}} \right)$ である。

(2)　「n 回の試行の後，3 点 ①，⑤，③ にある石がすべて同色であるか，または 3 点 ②，⑤，④ にある石がすべて同色である確率」を b_n として，b_4 を求めたい。

n 回の試行の後，5 点 ①，②，③，④，⑤ に置かれた 5 個の石について，すべて同色である確率を p_n，黒石が 1 個または 4 個である確率を q_n，黒石が 2 個または 3 個である確率を r_n とすると，$p_n + q_n + r_n = 1$ であり

$$p_{n+1} = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} p_n + \frac{1}{\boxed{\text{コ}}} q_n$$

$$q_{n+1} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} p_n + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} q_n + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} r_n$$

が成り立つ。

p_4 を求めると，$p_4 = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ となる。p_4 および a_4 の値を用いて計算すると，

$b_4 = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

3 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(4, −5, 2)，B(4, −2, 5)，C(−1, −1, 4)，D(1, 1, 5) がある。点 P を直線 AB 上の動点，点 Q を直線 CD 上の動点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{CD}}$（$p$，$q$ は実数）とおく。

(1) 3 点 O，P，Q が一直線上にあるとき

$$p = \boxed{\text{ア}},\ q = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) 直線 PQ が直線 AB に垂直であるとき

$$\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\,p + q = 0$$

が成り立つ。

(3) 線分 PQ の長さが最小となるような P，Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}\right),\ \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

2 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$ を

$$\mathrm{P_1}\left(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}\right),\ \mathrm{Q_1}\left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}\right)$$

とする。このとき，2 平面 $\mathrm{P_1Q_1A}$，$\mathrm{P_1Q_1C}$ のなす角を θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

である。

ただし，2 平面 α，β が平行でないとき，2 平面 α，β のなす角とは，2 平面の交線 ℓ 上の 1 点を T とし，平面 α，β 上における，T を通り ℓ に垂直な直線をそれぞれ m_α，m_β としたとき，2 直線 m_α，m_β のなす角である。

4　a，b，c，d を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x<-1 \text{ のとき}) \\ bx^2-x-3b+2c & (-1\leqq x<2 \text{ のとき}) \\ (1-c)x^3+4bx^2-3x+7c-5d & (2\leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき

$$a=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ b=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ c=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ d=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。以下，この条件のもとで考える。

(1)　方程式

$$f(x)=k \quad (k \text{ は実数の定数})$$

が相異なる 3 個の実数解 $\alpha,\beta,\gamma\,(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとき，k のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}<k<\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

である。また，k がこの範囲を動くとき，α のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}-\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}<\alpha<\boxed{\text{ツ}}$

である。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフを C とし，C 上に点 $\mathrm{P}(2,\ f(2))$ をとる。点 P における C の法線と C との交点のうち，$x<0$ の部分にあるものを Q とする。C 上の $2<x<4$ の部分に点 R をとるとき，三角形 QPR の面積が最大となるときの R の座標は

$$\mathrm{R}\left(\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}},\ \frac{\boxed{\text{ナ}}+\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}\right)$$

である。

5　2 つの関数

$y = ax^2 + 1$　（a は実数の定数）

$y = 2\log x$

のグラフをそれぞれ C_1，C_2 とする。2 曲線 C_1，C_2 はただ 1 点を共有し，その点において共通な接線をもっている。このとき，定数 a の値は $a = \dfrac{\boxed{ア}}{e^{\boxed{イ}}}$ である。以下，この条件のもとで考える。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を D とする。

D の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}e - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}\,e^{\boxed{キ}}} - \boxed{ク}$$

である。

また，D を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\left(e^{\boxed{サ}} - \frac{\boxed{シ}}{e^{\boxed{ス}}} - \boxed{セ}\right)\pi$$

である。

(2)　曲線 C_2 の $\sqrt{5} \leqq x \leqq 2\sqrt{3}$ の部分の長さを L とすると，L は定積分

$$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^{\boxed{ソ}} + \boxed{タ}}}{x}\,dx$$

で求められる。

$\sqrt{x^{\boxed{ソ}} + \boxed{タ}} = t$ とおいて置換積分を行うと，

$$L = \boxed{チ} + \log\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

である。

2019 年度　獨協医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) ア : 8　イウ : 12　エ : 2　オ : 6　カ : 1　キ : 6 (2) ク : 3　$\dfrac{ケ}{コ} : \dfrac{9}{2}$　$\dfrac{サ}{シ} : \dfrac{9}{2}$　ス : 5

(3) セ : 4　$\dfrac{ソ}{タ} : \dfrac{2}{3}$　$\dfrac{1}{チ} : \dfrac{1}{2}$　$\dfrac{ツ}{テ} : \dfrac{1}{3}$　$\sqrt{ト} : \sqrt{3}$
$\dfrac{ナ\sqrt{ニ}}{ヌ} : \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　ネ : 6

2

(1) $\dfrac{ア}{イ} : \dfrac{1}{2}$　$\dfrac{ウ}{エ} : \dfrac{1}{3}$　$\dfrac{1}{オ} : \dfrac{1}{3}$　$\dfrac{1}{カ} : \dfrac{1}{6}$　$\dfrac{1}{キ} : \dfrac{1}{4}$　$\dfrac{1}{ク^{n-1}} : \dfrac{1}{3^{n-1}}$

(2) $\dfrac{1}{ケ} : \dfrac{1}{6}$　$\dfrac{1}{コ} : \dfrac{1}{6}$　$\dfrac{サ}{シ} : \dfrac{5}{6}$　$\dfrac{ス}{セ} : \dfrac{1}{6}$　$\dfrac{ソ}{タ} : \dfrac{1}{3}$　$\dfrac{チ}{ツテ} : \dfrac{2}{27}$　$\dfrac{ト}{ナ} : \dfrac{4}{9}$

3

(1) ア : 3　$\dfrac{イ}{ウ} : \dfrac{3}{2}$

(2) エ : 2　オ : 2

(3) (カ, キ, ク) : (4, 1, 8)　(ケ, コ, サ) : (3, 3, 6)　$\dfrac{シ}{ス} : \dfrac{1}{4}$

4　$\dfrac{ア}{イ} : \dfrac{2}{3}$　$\dfrac{ウ}{エ} : \dfrac{1}{2}$　$\dfrac{オ}{カ} : \dfrac{4}{3}$　$\dfrac{キ}{ク} : \dfrac{3}{2}$

(1) $\dfrac{ケ}{コ} : \dfrac{2}{3}$　$\dfrac{サシ}{ス} : \dfrac{11}{6}$　$\dfrac{セ-\sqrt{ソタ}}{チ} : \dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$　ツ : 1

(2) テ : 2　$\sqrt{ト} : \sqrt{2}$　$\dfrac{ナ+ニ\sqrt{ヌ}}{ネ} : \dfrac{7+2\sqrt{2}}{6}$

5　$\dfrac{ア}{e^{イ}} : \dfrac{1}{e^2}$

(1) $\dfrac{ウ}{エ} : \dfrac{4}{3}$　$\dfrac{オ}{カ\,e^{キ}} : \dfrac{1}{3e^2}$　ク : 3　$\dfrac{ケ}{コ} : \dfrac{1}{2}$　$e^{サ} : e^2$　$\dfrac{シ}{e^{ス}} : \dfrac{1}{e^2}$　セ : 4

(2) $x^{ソ} : x^2$　タ : 4　チ : 1　$\dfrac{ツ}{テ} : \dfrac{5}{3}$