2020 年度　大阪医科大学（前期）

医学部　試験時間：100 分

全問必答

1　$\mathrm{A_0, A_1, A_2}$ を一辺の長さ 1 の正三角形の頂点とし，$\mathrm{P_0}$ を辺 $\mathrm{A_0A_1}$ 上の点として $\mathrm{A_0P_0} = a_0\ (0 < a_0 < 1)$ とする。さらに，k を自然数として，

$$\mathrm{A}_n = \begin{cases} \mathrm{A_0} & n = 3k \text{ のとき} \\ \mathrm{A_1} & n = 3k+1 \text{ のとき} \\ \mathrm{A_2} & n = 3k+2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。辺 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ 上の点 P_{n-1} が定まったとき，P_{n-1} から辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ に下ろした垂線の足を P_n と決め，$\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n = a_n$ とする。

(1)　a_n を a_{n-1} で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

2　$\triangle\mathrm{ABC}$ において $\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{BC} = 1$，$\angle\mathrm{B} = \theta$ とし，面積を S，辺の長さの和を l とする。また $\triangle\mathrm{ABC}$ を辺 BC の周りに 1 回転させてできる回転体 W の体積を V とする。

(1)　V を θ を用いて表せ。

(2)　$\dfrac{V}{Sl}$ が最大となるときの θ を定めよ。

3　m を 4 以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を 1 個ずつ続けて 4 個取り出す。最初の 2 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。4 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。

(1)　確率 $P(A)$，$P(B)$ をそれぞれ m で表せ。

(2)　確率 $P(A \cap B)$ を m で表せ。

(3)　事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

4　a，b，c はいずれも正の有理数とする。

(1)　$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せ。

(2)　$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ のいずれも有理数であることを示せ。

5　n を 0 以上の整数として，次のようにおく。

$$c_n(x)=\int_0^x t^n\cos t\,dt,\ s_n(x)=\int_0^x t^n\sin t\,dt,\ f_n(x)=\int_0^x t^n\cos(x-t)\,dt$$

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$c_n(x)$，$s_n(x)$ を $c_{n-1}(x)$，$s_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$f_n(x)$ を $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)\,dt=x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ があれば，その一例を求めよ。

2020 年度　大阪医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$　　(2)　$\frac{1}{3}$

2

(1)　$V = \frac{1}{3}\pi \sin^2\theta \cos^2\theta$　　(2)　$\theta = \frac{\pi}{4}$

3

(1)　$P(A) = \frac{m}{2m-1}$，$P(B) = \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}$

(2)　$P(A \cap B) = \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}$　　(3)　$\frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}$

4

(1)　証明は省略　　(2)　証明は省略

5

(1)　$c_n(x) = x^n \sin x - ns_{n-1}(x)$，$s_n(x) = -x^n \cos x + nc_{n-1}(x)$

(2)　$f_n(x) = nx^{n-1} - n(n-1)f_{n-2}(x)$

(3)　$h(t) = \frac{1}{4}t^4 + 3t^2$