2020 年度　大阪市立大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　α は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数とする。xy 平面において，$y=\sin x$ のグラフと $y=\sin(x-\alpha)$ のグラフの交点のうち，x 座標が正で最小のものを P とおく。次の問いに答えよ。

(1)　P の座標を α を用いて表せ。

(2)　P の x 座標を c とする。曲線 $y=\sin x$（$\alpha \leqq x \leqq c$），曲線 $y=\sin(x-\alpha)$（$\alpha \leqq x \leqq c$）と直線 $x=\alpha$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ。

(3)　α が $0<\alpha<\pi$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ。

2　p，q を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　虚数解の 1 つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2)　α の実部を r とする。$|\alpha-\overline{\alpha}|=|\alpha-b|=2\sqrt{3}$ のとき，$|r-b|$ を求めよ。

(3)　(2) の仮定の下で，可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

3　次の問いに答えよ。

(1)　$1<m \leqq n$ を満たす自然数 m，n に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ。ただし，実数 x に対して a が x の整数部分であるとは，a が整数であって $a \leqq x<a+1$ が成り立つことをいう。また，正の実数 x の自然対数を $\log x$ とし，$\log 2=0.69$，$\log 3=1.10$，$\log 2020=7.61$ とする。

4　座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ をとる。$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を通り xy 平面に垂直な直線を ℓ とする。また，点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$ は

$$r>0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=4$$

を満たしているものとする。次の問いに答えよ。

(1)　p および r を q を用いて表せ。また，q がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　線分 BP の中点を M とする。また，ℓ 上に点 N を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ が垂直になるようにとる。N の座標を q を用いて表せ。

(3)　N の z 座標が最小になるときの q の値を求めよ。

2020 年度　大阪市立大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi+\alpha}{2},\ \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

(2)　$V(\alpha)=\dfrac{\pi}{4}(2\sin\alpha+\sin 2\alpha)$

(3)　最大値：$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

2

(1)　証明は省略

(2)　3

(3)　$(p,\ q)=(3,\ 7),\ (3,\ -9)$

3

(1)　証明は省略

(2)　8

4

(1)　$p=\sqrt{3}q+\sqrt{3},\ r=\sqrt{-4q^2-6q+4},\ -2<q<\dfrac{1}{2}$

(2)　$\mathrm{N}\left(0,\ 1,\ \dfrac{2-q}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\right)$

(3)　$q=-\dfrac{2}{11}$