2020年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部　試験時間：180 分

試験時間：他教科との 3 教科で 180 分

1　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

(1)　n を 2 以上の整数とする。この問題において n 進数とは，0 以上 n 未満の整数 a_{d-1}，a_{d-2}，$\cdots$，a_0（ただし $a_{d-1} \neq 0$）を並べた列 $a_{d-1}a_{d-2}\cdots a_0$ のこととする。これは整数 $a_{d-1}n^{d-1}+a_{d-2}n^{d-2}+\cdots+a_0n^0$ と対応しており，任意の正整数と対応する n 進数がただ一つ存在することが知られている。例えば，

$$4\times5^3+0\times5^2+3\times5^1+1\times5^0=516$$

なので，5 進数の 4031 は整数 516 に対応する。6 進数の 123 は整数の $\boxed{\text{ア}}$ に対応し，整数 2020 は 7 進数の $\boxed{\text{イ}}$ に対応する。

(2)　n を 2 以上の整数とする。この問題において $(-n)$ 進数とは，0 以上 n 未満の整数 a_{d-1}，a_{d-2}，$\cdots$，a_0（ただし $a_{d-1} \neq 0$）を並べた列 $a_{d-1}a_{d-2}\cdots a_0$ のこととする。これは整数 $a_{d-1}(-n)^{d-1}+a_{d-2}(-n)^{d-2}+\cdots+a_0(-n)^0$ と対応しており，0 でない任意の整数と対応する $(-n)$ 進数がただ一つ存在することが知られている。例えば，

$$1\times(-4)^3+3\times(-4)^2+1\times(-4)^1+2\times(-4)^0=-18$$

なので，(-4) 進数の 1312 は整数 -18 に対応する。(-5) 進数の 1234 は整数の $\boxed{\text{ウ}}$ に対応し，整数 -2020 は (-7) 進数の $\boxed{\text{エ}}$ に対応する。

2　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

点 A を中心とする半径 R の円 C_A の内部に点 B をおく。点 A と B の距離を $r(<R)$ としたとき，点 B を中心とする半径 r の円 C_B を考える。

(1)　円 C_A と C_B の共通接線が 2 つ存在するための必要十分条件は，r と R の間に関係式 $\boxed{\text{ア}}$ が成立することである。

以下の設問では，関係式 $\boxed{\text{ア}}$ が成立し，円 C_A と C_B に 2 つの共通接線 ℓ と ℓ' が存在するとする。

(2)　接線 ℓ と ℓ' の交点 P と点 A の距離は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3)　円 C_A と接線 ℓ の接点を Q とする。線分 AQ と BQ の長さが等しいとき，r を R を用いて表すと，$r=\boxed{\text{ウ}}$ である。

3　平面上の三角形 OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，それぞれの大きさを $|\vec{a}| = a$，$|\vec{b}| = b$ とする。ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b} = c$ と表す。定数 α，β に対し，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \alpha$ を満たす平面上の点 X の集合 ℓ と，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \beta$ を満たす平面上の点 Y の集合 m との共通点を考えよう。
次の（ア）には適切な数を，（イ）から（カ）には，a，b，c，α，β で表された数式を入れて文章が完成させよ。
集合 ℓ は直線をなす。直線 ℓ 上の 1 点を P，直線 ℓ に平行な単位ベクトルを $\vec{\ell}$ とすると，ℓ 上の点 X は媒介変数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{l}$ と書ける。このとき $\vec{a}\cdot\vec{\ell} = \boxed{\text{ア}}$ である。これから，$\vec{\ell} = \pm\left(\boxed{\text{イ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{ウ}}\,\vec{b}\right)$ となる。また点 P として直線 OA と直線 ℓ の交点をとると，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \boxed{\text{エ}}\,\vec{a} + t\vec{\ell}$ と書ける。直線 ℓ と m の共通点を Z とすると $\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \boxed{\text{オ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$ である。

4　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。
プレイヤー A，B がそれぞれ箱を持っており，どちらの箱にも 1 から n の整数が書かれたカードが各 1 枚，合計 n 枚のカードが入っている。1 回のゲームでは，A と B はそれぞれ自分の箱から 1 枚のカードを無作為に選んで取り出し，カードの数字を比べる。数字が大きいカードを出した方が勝ち，小さいカードを出した方は負けで，カードの数字が同じ場合は引き分けとする。取り出したカードは箱に戻さず，箱の中のカードがなくなるまで n 回のゲームを行う。m 回目（$1 \leqq m \leqq n$）に取り出したカードによるゲームを第 m ゲームと呼び，第 m ゲームにおける A のカードの数字を a_m，B のカードの数字を b_m とする。

(1)　$n = 3$ とする。3 回のゲームすべてが引き分けとなる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。また 3 回のゲームが終わった時点で，A が勝ったゲーム数と B が勝ったゲーム数が 0 も含めて同数となる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$n = 3$ とする。第 1 ゲームでは A が勝ったとき，第 2 ゲームで A が勝つ確率は $\boxed{\text{ウ}}$ で，B が勝つ確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　n を 3 以上の整数とする。第 1 ゲームで A が勝つ確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。以下では $a_1 = k$ および $b_1 = l\,(k>l)$ であったとする。第 2 ゲームで $a_2 \neq l$ かつ $b_2 \neq k$ となり，かつ A が勝つ確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。また，第 2 ゲームで $a_2 = l$ または $b_2 = k$ の少なくとも一方が成り立ち，かつ A が勝つ確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

5　実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が以下の 2 条件をみたしているとする。

・条件 (i)　：　任意の x に対して $f(x) \geqq 0$
・条件 (ii)　：　任意の $x \neq 0$ と任意の $\alpha>1$ に対して $f(\alpha x)>\alpha f(x)$

(1)　条件 (ii) を用いて，任意の β（$0<\beta<1$）に対して $\beta f(1)>f(\beta)$ となることを示せ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　$x>y>0$ に対し，$f(x)>f(y)$ が成り立つことを示せ。

2020 年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1　ア：51　イ：5614　ウ：-86　エ：6123

2　ア：$\dfrac{R}{2}<r<R$　イ：$\dfrac{Rr}{R-r}$　ウ：$(-1+\sqrt{3})R$

3　ア：0　イ：$\dfrac{-c}{a\sqrt{a^2b^2-c^2}}$　ウ：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2b^2-c^2}}$　エ：$\dfrac{\alpha}{a^2}$　オ：$\dfrac{b^2\alpha-c\beta}{a^2b^2-c^2}$　カ：$\dfrac{a^2\beta-c\alpha}{a^2b^2-c^2}$

4　ア：$\dfrac{1}{6}$　イ：$\dfrac{2}{3}$　ウ：$\dfrac{1}{6}$　エ：$\dfrac{7}{12}$　オ：$\dfrac{n-1}{2n}$　カ：$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2(n-1)^2}$　キ：$\dfrac{n-k+l-1}{(n-1)^2}$

5

（1）　証明は省略　　（2）　$f(0)=0$　　（3）　証明は省略