

2020 年度 東京慈恵会医科大学 (前期)

医学部

試験時間 : 90 分

全問必答

1 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋 A には赤玉 3 個, 白玉 1 個, 袋 B には赤玉 1 個, 白玉 3 個が入っている。「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ, 次に, 袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す。1 回の操作の後, 袋 A に白玉が 2 個以上ある確率は (ア), 2 回の操作の後, 袋 A の中が白玉だけになる確率は (イ) である。

2 p を 2 以上の自然数の定数とする。 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, 関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば, $p = 2$ のとき

$$f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right)$$

$$f_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{x}{5}\right) \left(1 + \frac{x}{6}\right)$$

である。 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x > 0$) とおくととき, 次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$ が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。
- (2) $f(x)$ を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) a, b, n は自然数の定数で, b は 4 の倍数ではなく, $n \geq 2$ とする。
 a が 2^n の倍数であるが, 2^{n+1} の倍数ではないとき, $a(a+b), 2a(2a+b)$ のいずれかは, 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数ではないことを示せ。
- (2) b は自然数の定数で, 4 の倍数ではないとする。
 3 以上の任意の自然数 n に対して, 次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。


$\frac{a_n(a_n + b)}{2^n}$ は, 小数第 n 位の数字が 5 である小数第 n 位までの有限小数で表される。

4 O を原点とする xyz 空間内に, xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S と, 正四面体 $OABC$ があり, 条件「3 頂点 A, B, C は S 上にある」をみたしている。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 正四面体 $OABC$ の 1 辺の長さを求めよ。
- (2) 正四面体 $OABC$ が条件をみたしながら動くとき, xy 平面による正四面体 $OABC$ の切り口の面積の最小値を求めよ。

2020 年度 東京慈恵会医科大学 (前期)**医学部**

(略解)

 証明, 図示などは省略

1 ア : $\frac{3}{5}$ イ : $\frac{2}{225}$

2

(1) 証明は省略

(2) $f(x) = p^x$

3

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

4

(1) $\sqrt{6}$

(2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$