2021 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　関数 $f(x) = x|x^2 - 1|$ を考える。r は正の実数であるとして，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt$$

と定める。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$r \geqq 1$ のとき，$g(x)$ は単調に増加する関数であることを証明せよ。

(3)　$g(x)$ が単調に増加する関数であるような r の範囲を求めよ。

2　自然数 m に対し，m を 6 で割った余りを $r(m)$ と表す。k，l は自然数とし，xy 平面上の点

$$(r(k),\ r(l)),\ (r(2k),\ r(2l)),\ \cdots\cdots,\ (r(6k),\ r(6l))$$

を要素とする集合を $A(k,\ l)$ とする。$A(k,\ l)$ の要素の個数を $n(A(k,\ l))$ と表す。例えば $k = 6$，$l = 6$ の場合，$(r(6m),\ r(6m)) = (0,\ 0)$（$1 \leqq m \leqq 6$）なので，$n(A(6,\ 6)) = 1$ である。

(1)　大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げ，大のさいころの出た目を k（$1 \leqq k \leqq 6$），小のさいころの出た目を l（$1 \leqq l \leqq 6$）とするとき，$n(A(k,\ l)) \leqq 3$ となる確率を求めよ。

(2)　大小 2 つのさいころを投げて，大のさいころの出た目を k_1，小のさいころの出た目を l_1 とする。
　さらにもう一度大小 2 つのさいころを投げて，大のさいころの出た目を k_2，小のさいころの出た目を l_2 とする。$B = A(k_1,\ l_1) \cup A(k_2,\ l_2)$ とするとき，B の要素の個数が 7 になる確率を求めよ。

3　a は $a > 1$ を満たす実数とする。1 辺の長さ a の正方形である面を 1 つ，3 辺の長さが a，1，1 の二等辺三角形である面を 2 つ，4 辺の長さが a，1，1，1 の台形である面を 2 つ用意し，これらを組み合わせて 5 つの面で囲まれた立体 F ができたとする。

(1)　立体 F において，正方形の面に平行な長さ 1 の辺がある。その辺上の点から正方形の面に引いた垂線の長さ h を a を用いて表せ。

(2)　立体 F において，正方形の面と台形の面のなす角を θ_1 とし，正方形の面と二等辺三角形の面のなす角を θ_2 とするとき

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

となる a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の場合を考える。1 辺の長さが a の立方体にいくつかの F を正方形の面でうまくはり合わせると正十二面体ができる。この事実を利用して 1 辺の長さが 1 の正十二面体の体積を求めよ。

4　以下の問題 **A**，**B** のうち 1 題を選択し，解答用紙の選択欄に **A** または **B** を記入したうえで解答すること。

A．複素数 z に関する以下の条件 (C)，(D) を考える。

条件 (C)　$z^2 + mz + n = 0$ を満たす整数 m，n が存在する。
条件 (D)　$z^3 + pz + q = 0$ を満たす整数 p，q が存在する。

(1)　複素数 z が条件 (C) を満たすならば，条件 (D) も満たすことを証明せよ。

(2)　$\sqrt[3]{2}$ は条件 (D) を満たすが，条件 (C) は満たさないことを証明せよ。ただし，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは用いてよい。

(3)　$|z| = 1$ である複素数 z で条件 (D) を満たすものをすべて求めよ。

B．平面上で 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の頂点 A，B，C を中心とする半径 1 の円で囲まれた部分をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とする。D_1，D_2，D_3 の共通部分を K とする。すなわち K は，共通部分に含まれる弧 AB，弧 BC，弧 CA で囲まれた図形である。

xy 平面上に K を考え，点 A は原点に，点 C は y 軸上に，点 B は第 1 象限に属するように K をおく。この K が x 軸の上で正の方向にすべることなく転がり，1 回転するときにできる点 A の描く曲線を L とする。

(1)　K の弧 AB と x 軸が共有点をもつとき，その共有点を P とし，$\angle \mathrm{ACP} = \theta$ とおく。ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ とする。このとき点 A の座標を θ を用いて表せ。

(2)　K が 1 回転したあとの点 A の座標を求めよ。

(3)　曲線 L と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2021 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）図示は省略　（2）証明は省略　（3）$r \geqq \frac{1}{2}$

2

（1）$\frac{1}{3}$　（2）$\frac{2}{27}$

3

（1）$h=\frac{1}{2}\sqrt{3+2a-2a^2}$　（2）$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　（3）$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$

4

A.

（1）証明は省略　（2）証明は省略

（3）$z=\pm 1,\ \pm i,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

B.

（1）$\mathrm{A}(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$　（2）$\mathrm{A}(\pi,\ 0)$　（3）$\frac{5}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$