2021 年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　試験時間：100 分

全問必答

1　$a>0$ を定数とし，$I=\displaystyle\int_0^a e^{-x}\sqrt{a-x}\,dx$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq a$ において，$\dfrac{a-x}{\sqrt{a}}\leqq\sqrt{a-x}\leqq\sqrt{a}$ を示せ。

(2)　$\sqrt{a}-\dfrac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}}\leqq I\leqq\sqrt{a}-\sqrt{a}e^{-a}$ を示せ。

2　袋の中に赤札が 3 枚，青札が 3 枚入っている。A さんは，この袋から無作為に札を 3 枚取り出して箱の中に入れる。B さんは，この箱の中から札を 1 枚取り出し，色を確認して箱に戻すという操作を繰り返し行う。

(1)　A さんが箱の中に入れた 3 枚の札のうちで赤札の枚数が 0，1，2，3 である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　B さんが箱から最初に取り出した札が赤札である確率を求めよ。

(3)　B さんが箱から 1 回目，2 回目に取り出した札がどちらも赤札である確率を求めよ。

(4)　B さんが箱から札を n 回取り出して，それがすべて赤札だったとする。箱の中の 3 枚の札がすべて赤札である確率を求めよ。

3　α を $|\alpha|=1$，$\alpha\neq1$ なる複素数とする。複素数平面上の点の列 z_1，z_2，$\cdots$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} z_1=1 \\ z_{n+1}=\alpha z_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1)　すべての正整数 n について $z_{n+1}-\beta=\alpha(z_n-\beta)$ を満たす複素数 β を求めよ。

(2)　$z_m=z_n$ となる相異なる正整数 m，n が存在するとき $\alpha^{|m-n|}=1$ であることを示せ。

(3)　α は，ある無理数 r により $\alpha=\cos2\pi r+i\sin2\pi r$ と表されるとする。このときすべての相異なる正整数 m，n に対し $z_m\neq z_n$ であることを示せ。

4　直円錐に半径 1 の球が内接している。（つまり，球が直円錐の側面と接し，底面とは底面の円の中心で接する。）直円錐の母線と底面のなす角を 2θ $\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，円錐の側面積を S とする。

(1)　S を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=u$ とする。S を u の関数としてグラフの概形を描き，また S の最小値を求めよ。

5

(1)　a，b を互いに素な自然数とするとき，x，y の一次方程式 $ax=by$ の整数解をすべて求めよ。（答えのみでよい。）

自然数 n，i，j は $n-1 \geqq i > j \geqq 1$ を満たすとする。

(2)　次の等式を証明せよ。

$$ {}_n\mathrm{C}_i \cdot {}_i\mathrm{C}_j = {}_n\mathrm{C}_j \cdot {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j} $$

(3)　${}_n\mathrm{C}_j$ と ${}_n\mathrm{C}_i$ とは互いに素ではないことを，背理法で示せ。

2021 年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　証明は省略

（2）　証明は省略

2

（1）　順に，$\dfrac{1}{20}$，$\dfrac{9}{20}$，$\dfrac{9}{20}$，$\dfrac{1}{20}$

（2）　$\dfrac{1}{2}$

（3）　$\dfrac{3}{10}$

（4）　$\dfrac{3^n}{9+9\cdot 2^n+3^n}$

3

（1）　$\beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

4

（1）　$S=\dfrac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta}$

（2）　図示は省略，最小値：$(3+2\sqrt{2})\pi$

5

（1）　証明は省略

（2）　証明は省略