2021 年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部　試験時間：180 分

試験時間：他教科との 3 教科で 180 分

1　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

a，b は正の実数とする。x が正の範囲で定義された関数 $f(x)=(ax)^{-bx}$ を考える。この関数の値は正なので，両辺の自然対数をとると $\log f(x)=\boxed{\text{ア}}$ となる。両辺を x で微分することを考え，左辺の導関数を $f(x)$，$f'(x)$ を用いて表すと $(\log f(x))'=\boxed{\text{イ}}$ であり，右辺の導関数は $\left(\boxed{\text{ア}}\right)'=\boxed{\text{ウ}}$ である。よって，$f'(x)=\boxed{\text{エ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{オ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

2　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1)　辺 OA の中点を P とする。また辺 AB を 1 : 3 に内分する点を Q とする。このとき，
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{a}+\boxed{\text{イ}}\,\vec{b}$ である。

(2)　線分 PQ の中点を M とすると $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{b}$ である。

(3)　直線 AM が直線 OB と交わる点を R とすると $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}$ である。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\vec{0}$ が成り立つとき，$\alpha=\boxed{\text{カ}}$，$\beta=\boxed{\text{キ}}$ である。

3　以下の問に答えよ。ただし，答のみ記入すればよい。

整数を係数とする文字 x に関する 5 次以下の整式全体からなる集合を A とする。つまり，A は

$$\{a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_0,\ \cdots,\ a_5 \text{は整数}\}$$

という集合である。整数 k と A の要素 $F(x)$ に対し，$T_k(F(x))$ を

$$T_k(F(x))=xF''(x)-kF'(x)$$

と定める。ここで，$F'(x)$ は $F(x)$ を x の関数とみた場合の導関数，$F''(x)$ は $F'(x)$ の導関数を表す。

(1)　$F(x)=x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x-6$ に対し，$T_4(F(x))$ を求めよ。

(2)　A の要素のうち $T_2(F(x))=0$ を満たす整式 $F(x)$ 全体からなる集合を求めよ。

(3)　A の部分集合 B をとり，B のすべての要素 $F(x)$ に対して $T_3(F(x))$ を集めると

$$\{12bx+12c \mid b,\ c \text{ は整数}\}$$

という集合になる。そのような B をひとつ求めよ。

4　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

1，2，3，4，8，9 の 6 つの数字を，それぞれ 1 個ずつ横に並べて 6 桁の整数を作る。このとき，作ることのできる 6 桁の整数は $\boxed{\text{ア}}$ 通りであり，その総和は $\boxed{\text{イ}}$ $\times 111111$ である。また，作ることのできる 6 桁の整数のうち，2 の倍数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個あり，4 の倍数は $\boxed{\text{エ}}$ 個あり，9 の倍数は $\boxed{\text{オ}}$ 個あり，11 の倍数は $\boxed{\text{カ}}$ 個ある。

5　a，m，n は正整数であり $m>n$ とする。

(1)　整式 $x^{16}-1$ を因数分解せよ。

(2)　$a^{2^m}-1$ は $a^{2^n}+1$ で割り切れることを証明せよ。

(3)　$a^{2^m}+1$ と $a^{2^n}+1$ の最大公約数を d とする。a が偶数ならば $d=1$，奇数ならば $d=2$ であることを証明せよ。

2021 年度　奈良県立医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

ア：$-bx(\log a+\log x)$　イ：$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$　ウ：$-b(\log a+\log x+1)$

エ：$-b(ax)^{-bx}(\log x+\log a+1)$　オ：$\dfrac{1}{ae}$　カ：$e^{\frac{b}{ae}}$

2

ア：$\dfrac{1}{4}$　イ：$\dfrac{1}{4}$　ウ：$\dfrac{5}{8}$　エ：$\dfrac{1}{8}$　オ：$\dfrac{1}{3}$　カ：$\dfrac{5}{2}$　キ：$\dfrac{1}{2}$

3

(1)　$T_4(F(x))=8x^3-18x^2+24x-20$

(2)　$\{ax^3+b \mid a,\ b$ は整数 $\}$

(3)　$B=\{a_4x^4-3bx^2-4cx+a_0 \mid a_4,\ a_0,\ b,\ c$ は整数 $\}$

4

ア：720　イ：3240　ウ：360　エ：168　オ：720　カ：72

5

(1)　$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略