2021 年度　宮崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　p，q を実数とする。点 O を原点とする座標空間において，4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 2,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 6),\ \mathrm{D}(p,\ q,\ 1)$$

をとる。3 点 A，B，C を含む平面を α とし，$\angle\mathrm{AOD}$ の大きさを θ とし，$\triangle\mathrm{AOD}$ の面積を S とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1)　$\cos\theta$ を，p と q を用いて表せ。

(2)　面積 S を，p と q を用いて表せ。

(3)　点 D が平面 α 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。

2　a，b を実数とする。このとき，変数 x の関数

$$f(x) = \sin 2x + a(\sin x + \cos x) + b$$

について，次の各問に答えよ。

(1)　$t = \sin x + \cos x$ とおくとき，$f(x)$ を，t を用いて表せ。

(2)　x の方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも 1 つの実数解を持つようなすべての a，b を，座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ。

3　関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ。

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

(2)　(1) で求めた極限値を a とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - ax\}$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の増減と極値，および曲線 C の漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ。

4　A，B，C，D の 4 人がそれぞれ袋を持っている。

A の袋には，3 枚の札 $\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$ が入っている。
B の袋には，3 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$ が入っている。
C の袋には，2 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$ が入っている。
D の袋には，2 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$ が入っている。

この 4 人の間で，1 個の玉の受け渡しを次のように行う。

（※）はじめに，A が玉を持っている。
A は自分の袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす。以降，「玉を手渡された人は自分の袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす」ことをくり返す。ただし，A が袋から札を取り出すとき，どの札も同じ確率で取り出されるものとする。B，C，D が袋から札を取り出すときも同様とする。

（※）の状態から始めて，玉の受け渡しが n 回（$n \geqq 1$）行われたとき，

A，B，C，D が玉を持っている確率をそれぞれ A_n，B_n，C_n，D_n

とする。また，（※）の状態において，A，B，C，D が玉を持っている確率をそれぞれ A_0，B_0，C_0，D_0 とする。すなわち $A_0 = 1$，$B_0 = 0$，$C_0 = 0$，$D_0 = 0$ である。このとき，次の各問に答えよ。なお，すべての n について $C_n = D_n$ であることは，用いてよい。

(1)　A_1，B_1，C_1，A_2，B_2，C_2 を求めよ。

(2)　n が自然数のとき，A_n を，B_{n-1} と C_{n-1} を用いて表せ。また，B_n を，C_{n-1} と A_{n-1} を用いて表せ。さらに，C_n を，A_{n-1} と B_{n-1} を用いて表せ。

(3)　n が 0 または正の整数のとき，A_n を，n を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。

5　次の各問に答えよ。

(1)　**(必答)**

次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{し}}$ を適切な整数で埋めよ。

$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3$ を因数分解すると，

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3=(x+ay+b)(3x+cy+d)$$

となる。このとき，定数 a，b，c，d の値は

$$a=\boxed{\text{あ}},\ b=\boxed{\text{い}},\ c=\boxed{\text{う}},\ d=\boxed{\text{え}}$$

である。

これを用いて，等式

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y+9=0$$

を満たす整数 x，y の組 $(x,\,y)$ を求めると，そのような組 $(x,\,y)$ は 4 つあることがわかり，それらを x の値が小さい方から順に並べると，

$$\left(\boxed{\text{お}},\ \boxed{\text{か}}\right),\ \left(\boxed{\text{き}},\ \boxed{\text{く}}\right),\ \left(\boxed{\text{け}},\ \boxed{\text{こ}}\right),\ \left(\boxed{\text{さ}},\ \boxed{\text{し}}\right)$$

となる。

(2)　[A]，[B] のいずれか一方を選択し，解答せよ。

[A] **(選択)**

次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ を適切な数で埋めよ。ただし，i は虚数単位とする。

複素数

$$z_1=2+2\sqrt{3}i,\ z_2=5+5\sqrt{3}i,\ z_3=5-4\sqrt{3}+(4+5\sqrt{3})i$$

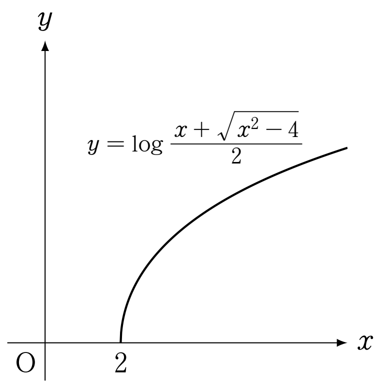
および $\alpha=1+\sqrt{2}i$ に対し，αz_1，αz_2，αz_3 で表される複素数平面上の点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする。

このとき，$\dfrac{z_3}{1+\sqrt{3}i}=x+yi$（$x$，$y$ は実数）となる x，y の値は $x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ である。また，$|\alpha|=\boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

[B] **(選択)**

次の空欄 $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ を適切な数または数式で埋めよ。ただし，$\boxed{\text{カ}}$ は x だけを用いて表された数式，$\boxed{\text{キ}}$ は y だけを用いて表された数式，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ は整数で埋めよ。また，$\log x$ は x の自然対数を表す。

曲線 $y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ （$x\geqq 2$）の概形は右図のようになる。



$y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ のとき，

$$(2e^y-x)^2=\boxed{\text{カ}}$$

であり，

$$x=\boxed{\text{キ}}$$

である。

曲線 $y = \log \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ と x 軸および直線 $x = 4$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。体積 V は，

$$V = \int_2^4 \boxed{\quad ク \quad}\, dx$$

により求めることができる。$\log \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} = t$ とおくと，V は，t だけで表される数式 $f(t) = \boxed{\quad ケ \quad}$ と $a = \log(2 + \sqrt{3})$ を用いて，

$$V = \int_0^a f(t)\, dt$$

と表される。ここで，0 でない定数 k に対し，関数 $t^2 e^{kt}$ の不定積分は

$$\int t^2 e^{kt}\, dt = \frac{e^{kt}}{k^3}\left(\boxed{\quad コ \quad}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。よって，

$$V = 4\pi\left(a^2 - \sqrt{\boxed{\quad サ \quad}}\, a + \boxed{\quad シ \quad}\right)$$

である。

2021 年度　宮崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\cos\theta = \dfrac{p+q}{\sqrt{2(p^2+q^2+1)}}$　(2)　$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{(p-q)^2+2}$　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2

(1)　$f(x) = t^2 + at + b - 1$　(2)　図示は省略

3

(1)　1　(2)　-3　(3)　図示は省略

4

(1)　$A_1 = 0,\ B_1 = \dfrac{1}{3},\ C_1 = \dfrac{1}{3},\ A_2 = \dfrac{4}{9},\ B_2 = \dfrac{1}{3},\ C_2 = \dfrac{1}{9}$

(2)　$A_n = \dfrac{1}{3}B_{n-1} + C_{n-1},\ B_n = \dfrac{1}{3}A_{n-1} + C_{n-1},\ C_n = \dfrac{1}{3}A_{n-1} + \dfrac{1}{3}B_{n-1}$

(3)　$A_n = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$　$(n \geqq 0)$

(4)　$\dfrac{3}{10}$

5

(1)
あ: 2　い: 3　う: 4　え: -1
お: -7　か: 5　き: -3　く: 1　け: 17　こ: -11　さ: 21　し: -15

(2)　[A]
ア　5　イ　4　ウ　$\sqrt{3}$　エ　72

[B]
カ: $x^2 - 4$　キ: $e^y + e^{-y}$　ク: $\pi\left(\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$　ケ: $t^2(e^t - e^{-t})$
コ: $k^2t^2 - 2kt + 2$　サ: 3　シ: 1