

2021 年度 福井大学 (前期)

医学部

試験時間 : 110 分

全問必答

1 曲線 C が媒介変数 θ を用いて、 $x = 3\cos\theta - 4\sin\theta$ 、 $y = 4\cos\theta + 3\sin\theta$ ($0 < \theta < \frac{3}{2}\pi$) と表されている。また、点 $(a, -a)$ を中心とする半径 1 の円 S がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) x 座標、 y 座標がともに整数になる C 上の点を求めよ。
- (2) S と C が共有点をもつとき、 a の値の範囲を求めよ。
- (3) S と C の共有点が存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

2 n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回投げて、 k 回目に出た目の数を a_k とする。さらに、 x_0, x_1, \dots, x_n を次の規則により定める。

$$\text{(規則)} \quad x_0 = 0, \quad x_k = \begin{cases} x_{k-1} + a_k & (a_k \text{ が偶数のとき}) \\ x_{k-1} \cdot a_k & (a_k \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_n = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $x_n = 2$ である確率を求めよ。
- (3) $x_n = 4$ である確率を求めよ。

3 $a > 0$ のとき、 $0 < t < 1$ を満たす定数 t に対して、

$$f(x) = t \log(1+x) - \log(1+a^{1-t}x^t)$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ での $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) $b > 0$ のとき、不等式 $(1+a)^{1-t}(1+b)^t \geq 1+a^{1-t}b^t$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。
- (3) $3^6 - 1 = 728$ 、 $9^6 - 1 = 728 \cdot 730$ である。 $\sqrt[6]{730}$ の小数第 2 位の数を求めよ。

4 座標空間において、2点 $A(1, 0, -1)$, $B(1, 2, 1)$ を通る直線 l を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面を S とする。また、点 $(0, 1, 1)$ を通り、 x 軸を含む平面を α とする。さらに、平面 α と曲面 S が交わってできる曲線を C とする。

一般に、平面の方程式は x, y, z の 1 次方程式

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{ただし, } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

で表される。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l と xy 平面の交点を求めよ。
- (2) S および 2 つの平面 $z = 1$, $z = -1$ で囲まれた部分の体積を求めよ。
- (3) C 上の各点を通り、 z 軸に平行な直線と xy 平面の交点の座標を $(u, v, 0)$ とする。 v を u の式で表せ。

2021 年度 福井大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $(0, 5), (-3, 4), (-4, 3), (-5, 0), (-4, -3), (-3, -4), (0, -5), (3, -4)$

(2) $-3\sqrt{2} \leq a \leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq a \leq 3\sqrt{2}$

(3) 図示は省略

2

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$

(3) $\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n+3}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^n$

3

(1) 最小値: $(t-1)\log(1+a)$ ($x=a$)

(2) 証明は省略, 等号成立条件: $a=b$

(3) 0

4

(1) $(1, 1, 0)$

(2) $\frac{14}{3}\pi$

(3) $v = \frac{u^2 - 2}{2}$