2022 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　t は $0<t<1$ を満たす実数とする。平面上の △ABC に対して，辺 BC，CA，AB をそれぞれ $t:(1-t)$ に内分する点を D，E，F とする。

(1)　△ABC の重心と △DEF の重心は一致することを証明せよ。

(2)　△ABC の面積を S とし，△DEF の面積を T とする。$\dfrac{T}{S}$ を t を用いて表し，$\dfrac{T}{S}$ の最小値を求めよ。

(3)　AB $=3$，BC $=5$，CA $=4$ とする。△DEF が直角三角形になるような t の値をすべて求めよ。

2　関数 $f(x)=xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，極値，凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$(m,\ n)$ を $m+n=10$ かつ $m \leqq n$ を満たす整数の組とする。このような組 $(m,\ n)$ に対して $f(m)+f(n)$ を考えるとき，$f(m)+f(n)$ の値が最大となる組 $(m,\ n)$ を求めよ。ただし，必要ならば $\dfrac{5}{2}<e<3$ であることは用いてよい。

3　n，m は自然数とする。赤玉と白玉の入った n 個の箱があり，次の条件 (a)，(b)，(c) を満たすとする。

(a)　それぞれの箱には赤玉と白玉が合計 n 個入っている。

(b)　赤玉はどの箱にも 1 個以上入っている。一方，白玉が入っていない箱はあってもよい。

(c)　それぞれの箱に入っている赤玉の個数は互いに異なる。

以下の試行 T を行う。

T：太郎さんは n 個の箱からひとつの箱を無作為に選び花子さんに渡す。花子さんは渡された箱の中から「無作為に玉をひとつ取り出し，色を確認し同じ箱にもどす作業」を $m+2$ 回繰り返す。

(1)　試行 T において，1 回目から m 回目までに取り出した玉がすべて赤玉である事象を X とし，その確率を p_n とする。このとき $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ を m を用いて表せ。

(2)　試行 T において，$m+1$ 回目と $m+2$ 回目に取り出した玉のうち，少なくとも 1 個が赤玉である事象を Y とする。(1) の事象 X が起こったときの事象 Y の起こる条件付き確率 $P_X(Y)$ を q_n とする。このとき $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ を m を用いて表せ。

4　n は 3 以上の整数とする。正 n 角形の外接円の半径を正 n 角形の半径とよぶ。
$2n+2$ 個の面で囲まれた凸多面体で，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たすものを A_n とする。

(a)　2 個の半径 1 の正 n 角形を面にもち，それらは平行である。

(b)　(a) の 2 個の面の他に互いに合同な $2n$ 個の正三角形を面にもつ。例えば，A_3 は正八面体になる。
$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とおく。

(1)　A_n の辺の数を n を用いて表せ。

(2)　条件 (b) の正三角形の高さを θ を用いて表せ。

条件 (a) の 2 つの面の間の距離（一方の面から他方の面へ引いた垂線の長さ）を H とする。

(3)　H を θ を用いて表せ。

(4)　A_n の体積を V とするとき，$\dfrac{V}{nH}$ を θ を用いて表せ。

2022 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）証明は省略

（2）$\dfrac{T}{S} = 3t^2 - 3t + 1$，最小値：$\dfrac{1}{4}\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$

（3）$t = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{25},\ \dfrac{16}{23}$

2

（1）図示は省略

（2）$(m,\ n) = (1,\ 9)$

3

（1）$\dfrac{1}{m+1}$

（2）$\dfrac{(m+1)(m+4)}{(m+2)(m+3)}$

4

（1）$4n$

（2）$\sqrt{3}\sin\theta$

（3）$H = \sqrt{2 + 2\cos\theta - 4\cos^2\theta}$

（4）$\dfrac{V}{nH} = \dfrac{1}{3}\sin\theta(1 + 2\cos\theta)$