2022 年度　大阪公立大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　log を自然対数，e をその底とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$t \geqq 0$ とする。次の極限を t を用いて表せ。

$$\lim_{n\to\infty} e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2}$$

(3)　(2) で求めた極限を $f(t)$ とおく。このとき

$$\int_0^{100} f(t)\,dt < \frac{e^{5000}}{50}$$

が成り立つことを示せ。

2　n を 2 以上の整数とする。1 から 6 までの目のある 1 個のさいころを n 回続けて投げるとき，n 回目で初めて直前の回と同じ目が出る確率を P_n で表す。次の問いに答えよ。

(1)　P_n を n を用いて表せ。

(2)　$S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} P_k$ を n を用いて表せ。

(3)　$S_n \geqq \dfrac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ。

(4)　$E_n = \sum\limits_{k=2}^{n} kP_k$ を n を用いて表せ。

3　p，q を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$p=7$，$q=11$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

(2)　$p=6$，$q=9$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組は存在しないことを示せ。

(3)　i を虚数単位とする。自然数 n に対して，集合 X_n を

$$X_n = \left\{ \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \,\middle|\, k \text{ は整数} \right\}$$

と定める。また，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組が存在すると仮定する。このとき，集合 X_{pq} に属するすべての数は，X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されることを示せ。

(4)　集合 X_n は (3) で定めたものとする。複素数

$$\cos\frac{2\pi}{pq} + i\sin\frac{2\pi}{pq}$$

が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき，p と q は互いに素であることを示せ。

4　実数 t に対して，

$$f(t)=2\cos t+\cos 2t,\ g(t)=2\sin t-\sin 2t$$

とおく。t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち，

$$0<t<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<t<2\pi$$

の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とする。また，$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の等式を示せ。

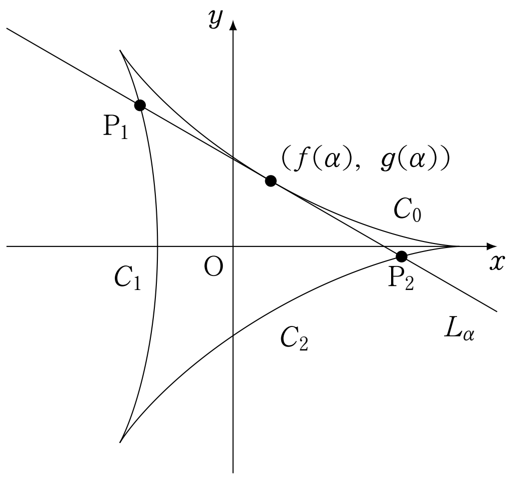
$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(2)　次の等式を示せ。

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(3)　接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す。ただし $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。このとき，θ を α を用いて表せ。

(4)　L_α と C_1 の交点を P_1 とし，L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定であることを示せ。



C_0，C_1，C_2 の概形

2022 年度　大阪公立大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略

(2)　$e^{\frac{1}{2}t^2}$

(3)　証明は省略

2

(1)　$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$

(2)　$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3)　$n=5$

(4)　$E_n=7-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

3

(1)　$(x,\ y)=(-3,\ 2)$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略

4

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$\theta=-\frac{\alpha}{2}$

(4)　証明は省略