

2022年度 大阪医科薬科大学 (前期)

医学部

試験時間：100分

📖 全問必答

1 黒石 3 個と白石 7 個が袋に入っている。袋から 1 個ずつ 10 個の石を取り出して一列に並べる。

- (1) 黒と白の合計 10 個の石の相異なる並び方の総数を求めよ。
- (2) 黒石が 3 個連続する確率を求めよ。
- (3) 並べた列が「2 つ以上の連続した白石の両端に黒石がある」という部分を含む確率を求めよ。

2 n を自然数とする。 $0! = 1$, 関数 $g(x)$ に対して $\frac{d^0}{dx^0}g(x) = g(x)$ とする。

- (1) $0 \leq m \leq n$ なる整数 m に対して, $(x+1)^m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^m)$ を示せ。
- (2) $f(x)$ が実係数の n 次多項式のとき, $f(x+1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}f(x)$ を示せ。

3 $0 < a < b$ とする。曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 上の x 座標が a, b である点をそれぞれ A, B とする。曲線 C , 直線 $x = a, x = b$ および x 軸で囲まれる部分を R とおく。 x 座標が \sqrt{ab} である曲線 C 上の点を D として, 線分 $AD, DB, x = a, x = b$ および x 軸で囲まれる図形を T とおく。 x 座標が $\frac{a+b}{2}$ である曲線 C 上の点における C への接線を m として, 直線 $m, x = a, x = b$ および x 軸で囲まれる台形を U とおく。図形 R, T, U の面積をそれぞれ $S(R), S(T), S(U)$ とおく。

- (1) $S(R)$ を a, b で表せ。
- (2) $S(T), S(U)$ を a, b で表せ。
- (3) 不等式 $\frac{2}{a+b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ を示せ。

4 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対し, 平面上の点 $A(\cos \theta, 0), C(0, \sin \theta)$ を対角線とする正方形 $ABCD$ を考える。ただし AC の中点を M とするとき, M のまわりに反時計回りに A を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点が B であるとする。

- (1) ベクトル \overrightarrow{MB} の成分を求めよ。
- (2) 点 B, D の座標を求めよ。

θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を動くとき, 正方形 $ABCD$ の周と内部が通過してできる図形を W とする。

- (3) W は $x^2 + y^2 \leq 1$ によって表される領域に含まれることを示せ。
- (4) W の面積を S とするとき $S \geq 2$ を示せ。

5 数字 $1, 2, \dots, n$ の順列 x_1, x_2, \dots, x_n に対して, xy 平面上の点の集合 $\{(1, x_1), (2, x_2), \dots, (n, x_n)\}$ を考える。この集合が直線 $y = x$ に関して線対称であるような順列をここでは対称な順列と呼ぶことにする。対称な順列の個数を a_n とするとき, $a_1 = 1, a_2 = 2$ である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

(2) すべての自然数 k に対し, $a_{3k+1} \equiv a_{3k} \pmod{3}$, $a_{3k+2} \equiv 2a_{3k} \pmod{3}$ を示せ。ただし, 整数 a, b と正の整数 m について, $a - b$ が m の倍数であるとき $a \equiv b \pmod{m}$ と表す。

(3) すべての自然数 n に対し, a_n は 3 の倍数でないことを示せ。

2022年度 大阪医科薬科大学 (前期)**医学部**

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) 120 通り

(2) $\frac{1}{15}$ (3) $\frac{23}{30}$ **2**

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

3(1) $S(R) = \log b - \log a$ (2) $S(T) = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}, S(U) = \frac{2(b-a)}{a+b}$

(3) 証明は省略

4(1) $\vec{MB} = \left(\frac{\sin \theta}{2}, \frac{\cos \theta}{2} \right)$ (2) $B\left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2} \right), D\left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{2}, \frac{\sin \theta - \cos \theta}{2} \right)$

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

5

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略