2022 年度　神戸大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。以下の問に答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。b_n の値を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

2　m を 3 以上の自然数，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする。円 C_1 に内接する（すべての頂点が C_1 上にある）正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する（P_1 のすべての辺と接する）円を C_2 とする。同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする。C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　r_n，s_n の値を θ，n を用いて表せ。

(2)　$f(m)$ の値を θ を用いて表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m)$ を求めよ。ただし，必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ を用いてよい。

3　a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$f(1)=0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4　a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　s，t の値を a を用いて表せ。

(3)　a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　t の値を s を用いて表せ。

5　a，b を実数，p を素数とし，$1<a<b$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　x，y，z を 0 でない実数とする。$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2)　m，n を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする。m，n の値を p を用いて表せ。

(3)　m，n を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^p$ とする。b の値を a，p を用いて表せ。

2022年度　神戸大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略

(2)　$b_n = \dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2$

(3)　$2^{\frac{2}{3}}$

2

(1)　$r_n = \left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{n-1}$，$s_n = \pi\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)^{n-1}$

(2)　$f(m) = \dfrac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

(3)　$\dfrac{2}{3}\pi$

3

(1)　極大値：$-\log a + a - 1$，極小値：0

(2)　$\dfrac{4}{3}\log 2 - 4 + \pi$

4

(1)　$0<a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$

(2)　$s = -\dfrac{a}{a-1}$，$t = -\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$

(3)　$s<-4$，$0<s$

(4)　$t = \begin{cases} \sqrt{s(s+1)} & (s>0) \\ -\sqrt{s(s+1)} & (s<-4) \end{cases}$

5

(1)　証明は省略

(2)　$m = p(p+1)$，$n = p+1$

(3)　$b = a^p$