2023 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　次の条件 (a)，(b) を満たす凸多面体を考える。

(a)　面は正三角形または正方形である。

(b)　合同な 2 つの面は辺を共有しない。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　一つの頂点を共有する面の数は 4 であることを証明せよ。

(2)　正三角形と正方形の面の数をそれぞれ求めよ。

(3)　正八面体を平面で何回か切断することで条件 (a)，(b) を満たす凸多面体が得られる。どのように切断するのか説明せよ。

(4)　(3) の切断で得られる凸多面体を F とし，F の 1 辺の長さは 1 とする。F のすべての正三角形の面に接する球を B とする。B と F の共通部分の体積を求めよ。

2　関数 $f(t)$，$g(t)$ は微分可能でその導関数は連続であり，導関数 $f'(t)$，$g'(t)$ の値は同時に 0 になることはないとする。

xy 平面上で媒介変数 t を用いて $x = f(t)$，$y = g(t)$ と表される曲線 C を考える。C 上に点 $\mathrm{P}(f(t_0),\ g(t_0))$ をとる。ただし $t \fallingdotseq t_0$ ならば $(f(t),\ g(t)) \fallingdotseq (f(t_0),\ g(t_0))$ を満たすとする。P を通る直線 ℓ を考える。C 上に P と異なる点 $\mathrm{Q}(f(t),\ g(t))$ をとり，Q から ℓ に垂線をおろし，ℓ との交点を H とする。ただし，Q が ℓ 上にあるときは H ＝ Q とする。

(1)　$\overrightarrow{n}$ は大きさ 1 の ℓ に垂直なベクトルとする。

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = \left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$$

であることを証明せよ。

(2)　ℓ が P における C の接線であるための必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = 0$ であることを証明せよ。

3　z は 0 でない複素数とする。0 以上の整数 n に対して，$a_n = z^n + \overline{z}^n$ とおく。ここで $\overline{z}$ は z と共役な複素数である。

(1)　a_n は実数であることを証明せよ。

(2)　$z = 1 + i$ とする。ただし i は虚数単位である。0 以上の整数 k に対して，a_{4k}，a_{4k+1}，a_{4k+2}，a_{4k+3} を求めよ。

(3)　次の条件を満たす z をすべて求めよ。
条件：0 以上のすべての整数 k に対して $a_{6k} = a_{6k+2}$ である。

4　a，b は $0<b<1<a$ を満たす実数とする。xy 平面上で方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

で表される楕円を C とする。C と同じ焦点をもち，点 $(b,\ 0)$ を通る双曲線を D とする。C と D の共有点のうち第 1 象限にあるものを P とし，その x 座標を s とする。C で囲まれる部分と領域 $0 \leqq x \leqq s$ との共通部分を K とし，直線 $x=s$ と D で囲まれる部分を L とする。K と L を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_K，V_L とする。

(1)　s を a，b を用いて表せ。

(2)　点 P における C の接線と D の接線は垂直であることを証明せよ。

(3)　V_K を a，b を用いて表せ。

(4)　$s=1$ であるとき，極限 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_L}{V_K}$ を求めよ。

2023 年度　京都府立医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）証明は省略

（2）正三角形：8，正方形 6

（3）説明は省略

（4）$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{16\sqrt{6}}{27}\right)\pi$

2

（1）証明は省略

（2）証明は省略

3

（1）証明は省略

（2）$a_{4k}=(-1)^k2^{2k+1}$，$a_{4k+1}=(-1)^k2^{2k+1}$，$a_{4k+2}=0$，$a_{4k+3}=(-1)^{k+1}2^{2k+2}$

（3）$z=\pm1$，$\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{2}$，$\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{2}$

4

（1）$s=ab$

（2）証明は省略

（3）$V_K=\dfrac{\pi}{3}ab(a^2-1)(3-b^2)$

（4）$\dfrac{1}{3}$