2023年度　佐賀大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく。これらは

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

および

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。頂点 O から △ABC を含む平面に垂線を引き，交点を H とする。次の問に答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　実数 s，t により $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ。

(3)　(2) の s，t の値をそれぞれ求めよ。

(4)　四面体 OABC の体積を求めよ。

2　0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとへもどす。これを n 回くり返したとき，取り出されたカードの数字の総和を S_n で表す。S_n が 3 で割り切れる確率を p_n とし，S_n を 3 で割ると 1 余る確率を q_n とするとき，次の問に答えよ。

(1)　p_{n+1} および q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ。

(2)　p_n および q_n を n を用いて表せ。また，極限値 $\lim_{n\to\infty} p_n$ および $\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

3　a，b，c，d は実数とし，$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $f(x)$ とおく。4 次方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α，β を持つとする。次の問に答えよ。

(1)　$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$，c，d を a，b を用いて表せ。

(2)　複素数平面上において点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ。

4　次の問に答えよ。

(1)　等式 $(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos\theta}$ を示せ。また，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$ の値を求めよ。

(2)　等式

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

を示せ。また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ の値を求めよ。

2023年度　佐賀大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=8$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=6$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

(3) $s=\dfrac{5}{16}$，$t=\dfrac{3}{8}$

(4) $\dfrac{\sqrt{46}}{6}$

2

(1) $p_{n+1}=\dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{4}$

(2) $p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$q_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{3}$

3

(1) $\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b+6$，$c=-6a$，$d=-6b-36$

(2) $a=2\sqrt{6}$

(3) $b=8$

4

(1) 証明は省略，1

(2) 証明は省略，$\dfrac{\log 3}{2}$

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\log 3}{4}$