2023年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　試験時間：100 分

全問必答

1　座標平面上で，放物線 $C: y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ と $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における 2 本の法線の交点を P とし，点 B を点 A に限りなく近づけたときに点 P が近づく点を Q とする。

(1)　放物線 C の点 A における法線の方程式を求めよ。

(2)　Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 Q が描く曲線の長さを求めよ。

2　関数 $f(x)=e^x\sin(e^x)$ について，以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点を，x 座標の小さい方から順に A_1，A_2，A_3，…… とし，A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の x 座標を a_n とする。また，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。a_n と S_n を求めよ。

(2)　A_n における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を T_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}$ を求めよ。

(3)　$a_n<x<a_{n+1}$ における曲線 $y=|f(x)|$ と曲線 $y=e^x$ との共有点を B_n とし，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ の面積を U_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}U_n$ を求めよ。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　n を 2 以上の整数とする。実数係数の n 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解 α をもつならば，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(2)　n を正の整数とする。
半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ について，n 個の線分の長さの積 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3\times\cdots\cdots\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n$ を L とする。
複素数平面上で中心 O，半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ を考えることで，L を求めよ。

4　1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれた 3 枚のカードが入っている箱と，頂点が反時計回りに A，B，C の順に並んでいる正三角形 ABC がある。箱から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとに戻す。このとき，点 P を以下の＜規則＞にしたがって正三角形の頂点を移動させ，移動した頂点に応じて文字列を作る試行を行う。文字列は左から順に文字○，×を書くものとする。

＜規則＞

・1 回目は次のようにする。
1 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 A におき，文字○を書く。
2 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 B におき，文字×を書く。
3 の書かれたカードが取り出されたときは点 P を頂点 C におき，文字×を書く。

・2 回目以降は次のようにする。
k（$k=1,\ 2,\ 3$）の書かれたカードが取り出されたとき，点 P がおいてある頂点から反時計回りに k 個先の正三角形の頂点に移動し，移動した頂点が A のときは既にある文字列の右側に○を，移動した頂点が A 以外のときは既にある文字列の右側に×を書く。

例えば，3 回の試行において取り出されたカードに書かれた数字が順に 1，2，3 のとき，点 P は A → C → C と移動し，得られる文字列は○××である。この試行を n（$n \geqq 2$）回繰り返したとき，文字列中に×が連続しない確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n（$n \geqq 2$）を求めよ。

5　n を正の整数とし，$n!$ を 9 進法で表したときに末尾に並ぶ 0 の個数を $f(n)$ で表す。例えば，$10! = 3628800 = 6740700_{(9)}$ より，$f(10) = 2$ である。

(1)　$f(8)$ および $f(6789)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　k を 0 以上の整数とする。$f(n) = k$ のとき，$4k < n$ を示せ。

(3)　$f(n) = 1000$ を満たす最小の n を求めよ。

2023 年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1）$x+2ay=2a^3+a$

（2）$\mathrm{Q}\left(-4a^3,\ 3a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

（3）$5\sqrt{5}-1$

2

（1）$a_n=\log(n\pi)$，$S_n=2$

（2）1

（3）$\dfrac{\pi}{2}$

3

（1）証明は省略

（2）$L=\sqrt{2n+1}$

4

（1）$p_2=\dfrac{5}{9}$，$p_3=\dfrac{11}{27}$，$p_4=\dfrac{7}{27}$

（2）$p_n=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

5

（1）$f(8)=1$，$f(6789)=1695$

（2）証明は省略

（3）$n=4008$