2023 年度　山梨大学（後期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1 次の問題文の空欄 $\boxed{ア}$ から $\boxed{ケ}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形がある。その頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F，G，H とする。このとき，$\mathrm{AC}^2 = \boxed{ア}$ であり，$\mathrm{AD}^2 = \boxed{イ}$ である。ただし，答えが分数のときは，分母を有理化せよ。

(2) n を自然数とする。中が見えない壺に，n 個の赤玉と n 個の白玉が入っている。この壺の中から n 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した白玉が k 個以下となる確率を $P_{n,k}$ と書く。このとき，$P_{4,0} = \boxed{ウ}$ であり，$P_{5,1} = \boxed{エ}$ であり，$P_{6,2} = \boxed{オ}$ である。ただし，すべて既約分数で解答せよ。

(3) 200 個から 100 個取る組合せの総数 ${}_{200}\mathrm{C}_{100}$ を素因数分解したとき，2 桁の素因数の中で最大のものは $\boxed{カ}$ である。

(4) 空間内に 4 点 A(1，2，3)，B(3，1，4)，C(2，7，1)，D(5，7，7) がある。直線 AB 上を点 P が動き，直線 CD 上を点 Q が動く。直線 AB と直線 PQ が垂直であり，かつ直線 CD と直線 PQ が垂直であるとき，点 P の座標は $\boxed{キ}$ であり，点 Q の座標は $\boxed{ク}$ である。ただし，答えに分数があらわれるときは，既約分数にせよ。

(5) 実数の組 $(x,\ y)$ が $|x+2y| \leqq 1$ を満たすとき，$(x-2)^2+(y-1)^2$ の最小値は $\boxed{ケ}$ である。

2 次の問題文の空欄 $\boxed{コ}$ から $\boxed{ソ}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 6 + \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ $(x \geqq 1)$ は，$x = \boxed{コ}$ のとき，最小値 $\boxed{サ}$ をとる。

(2) 複素数平面上で，$|z+1+i| + |z-1-i| = 6$ を満たす点 z の全体を C とする。このとき，C によって囲まれる部分の面積は $\boxed{シ}$ である。

(3) x の 8 次式 $f(x)$ は整数 k $(0 \leqq k \leqq 8)$ に対して，$f(k) = \dfrac{k^2}{k+1}$ を満たす。このとき，$f(9)$ の値を既約分数で求めると，$f(9) = \boxed{ス}$ である。

(4) xy 平面において，2 つの曲線 $y = \sin x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{4}\right)$，$y = \cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{セ}$ である。また，この部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{ソ}$ である。

3 1 から 10 までの整数が 1 つずつ重複せずに書かれた 10 枚のカードがある。この中から同時に 4 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の和が 20 以下となる確率を求めよ。

4　整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が次の 2 つの式をともに満たすとき，$(x,\ y,\ z)$ は $(*)$ を満たす整数の組であるという。

$$(*)\quad x^2+y^2+z^2-3xyz=0,\ 0<x<y<z$$

例えば，$(1,\ 2,\ 5)$ は $(*)$ を満たす整数の組である。

(1)　$(2,\ 5,\ a)$ が $(*)$ を満たす整数の組となるような整数 a を求めよ。

(2)　次の条件 (i)，(ii) をともに満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを示せ。

　(i)　$a_1=1,\ a_2=2$ である。

　(ii)　任意の自然数 n に対して，$(a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2})$ は $(*)$ を満たす整数の組である。

(3)　(2) の数列 $\{a_n\}$ はただ 1 つである。この数列 $\{a_n\}$ について，a_n が偶数となる n をすべて求めよ。

5　0 以上の整数 n に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\ f_{n+2}(x)=2xf_{n+1}(x)-f_n(x)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。

(1)　0 以上の整数 n と任意の実数 θ に対し，等式 $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 $p,\ q$ に対し，$I_{p,q}=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'_{3p}(x)f'_{3q}(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ。ただし，$f'_n(x)$ は $f_n(x)$ の導関数である。

2023 年度　山梨大学（後期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア：$2+\sqrt{2}$　イ：$3+2\sqrt{2}$

(2)　ウ：$\dfrac{1}{70}$　エ：$\dfrac{13}{126}$　オ：$\dfrac{131}{462}$

(3)　カ：61

(4)　キ：$\left(-\dfrac{6}{7},\ \dfrac{41}{14},\ \dfrac{29}{14}\right)$　ク：$\left(\dfrac{13}{7},\ 7,\ \dfrac{5}{7}\right)$

(5)　ケ：$\dfrac{9}{5}$

2

(1)　コ：$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　サ：-5

(2)　シ：$3\sqrt{7}\pi$

(3)　ス：$\dfrac{41}{5}$

(4)　セ：$2\sqrt{2}$　ソ：$\dfrac{\pi(\pi+6)}{4}$

3　$\dfrac{8}{21}$

4

(1)　$a=29$

(2)　証明は省略

(3)　$n=4m+2$　$(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

5

(1)　証明は省略

(2)　$I_{p,q}=\begin{cases}\dfrac{3p^2\pi}{2} & (p=q)\\ 0 & (p\neq q)\end{cases}$