

2023年度 島根大学 (前期)

医学部

試験時間：120 分

全問必答

1 $\triangle OAB$ において、 $OA = 2$, $OB = 1$, $\angle OBA = 90^\circ$ とする。また、 $0 < t < 1$ とし、 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P , OB の中点を Q とする。 AQ と BP の交点を C , $\angle COQ = \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。
- (2) $\cos \theta$ を t を用いて表せ。
- (3) a を実数の定数とする。このとき、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} - 6at = 0$ をみたす t が、 $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$ の範囲に 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 和 $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = 1 + (-1) + \dots + (-1)^{n-1}$ を求めよ。
- (2) 和 $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k = 1 + (-1)2 + \dots + (-1)^{n-1} n$ を求めよ。
- (3) 和 $C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{n} (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$ を求めよ。

3 関数 $f(x) = -\log(3 - 2^{-x}) + x \log 2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の定義域を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。
- (3) $f(x)$ の最小値が $-2 \log \frac{3}{2}$ となることを示せ。

4 a を実数の定数、 n を自然数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = 1 - ax^n$ と定める。次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n+5}{n+2} \leq 2$ を示せ。
- (2) $\int_0^1 xf(x) dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$ を示せ。
- (3) (2) の不等式において、等号が成立するときの a と n の値を求めよ。

2023年度 島根大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) 1

(2) $\frac{1}{\sqrt{3t^2+1}}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{7}{12}$

2

(1) $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$

(2) $\frac{1+(-1)^{n-1}(2n+1)}{4}$

(3) $\frac{\{1+(-1)^{n-1}\}(n+1)}{4n}$

3

(1) $x > -\frac{\log 3}{\log 2}$

(2) $x = \frac{\log(3+\sqrt{5})}{\log 2} - 1, \frac{\log(3-\sqrt{5})}{\log 2} - 1$

(3) 証明は省略

4

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $a = n = 1$